Pracovní úkol

1. Určete rychlost šíření podélných zvukových vln v mosazné tyči metodou Kundtovy trubice. Z naměřené rychlosti zvuku stanovte modul pružnosti v tahu E materiálu tyče.
2. Změřte rychlost zvuku ve vzduchu a v oxidu uhličitém pomocí uzavřeného resonátoru. Výsledky měřené zpracujte metodou linární regrese a graficky znázorněte.
3. Vypočítejte Poissonovu konstantu κ oxidu uhličitého z naměřené rychlosti zvuku.

Teoretické základy měření

Rychlost šíření zvuku c v daném prostředí souvisí s vlnovou délkou λ a kmitočtem ν zvuku vztahem

$$\lambda\nu = c. \tag{1}$$

Délku zvukové vlny lze nejnázorněji měřit na stojatém vlnění. Při stojatém vlnění se vytvoří uzly a kmitny. Vzdálenost dvou sousedních uzlů nebo dvou sousedních kmiten odpovídá polovině vlnové délky. Vzdálenost uzlů od nejbližší kmitny je rovna čtvrtině vlnové délky.

Kundtova trubice je vodorovná skleněná trubice, která je na jednom konci uzavřená. Kundtova trubice je napuštěna plynem. Do trubice nasypeme jemný korkový prášek, abychom mohli pozorovat stojaté vlnění uvnitř trubice. Na druhém konci trubice je zdroj zvuku. Zdrojem zvuku je tyč, která je ve své polovině upevněná, na jednom konci má korkový píst a druhý konec je volný. Korkový píst je umístěn uvnitř skleněné trubice tak, aby se nedotýkal stěny trubice. Posunem trubice vůči tyči nastavíme podmínky pro vznik stojatých vln. Třením volného konce tyče nakalafunovanou látkou vzniká podélné vlnění, které v Kundtově trubici s korkovým práškem vytváří stojaté vlny.

Tyč je upevněna ve své polovině. V tomto případě je uzel v místě upevnění a na obou koncích kmitny. Délka tyče se rovná dvěma čtvrtvlnám a délka vlny $\lambda 1$ základního tónu je rovna dvojnásobné délce tyče l:

$$\lambda_1 = 2l. \tag{2}$$

Rezonance zvukových vln nastane, je-li délka trubice rovna celistvému násobku půlvn zvukové vlny v plynu.

Když se vlna šíří ve dvou různých prostředích, zachovává se její kmitočet. Označíme-li c_1 rychlost zvuku v tyči a c_2 rychlost zvuku v plynu a λ_2 délku zvukové vlny v plynu, dostaneme ze vztahu pro zachování kmitočtu vztah

$$\frac{c_1}{\lambda_1} = \frac{c_2}{\lambda_2}. \tag{3}$$

Změříme-li délku tyče l, získáme ze vztahu (2) vlnovou délku zvuku v tyči. Proměříme-li obrazec v Kundtově trubici, určíme vlnovou délku zvuku v plynu λ_2. Známe-li rychlost zvuku v plynu, určíme dle (3) rychlost zvuku v tyči c_1.

Zvukové vlny v plynech se ve volném prostoru šíří dle Laplaceova vztahu rychlostí c:

$$c = \sqrt{\kappa\frac{p}{\rho}}, \tag{4}$$

kde κ je Poissonova konstanta, p tlak plynu a ρ je hustota plynu. Dle vztahu (5) ve studijním textu k této úloze se rychlost zvuku v suchém vzduchu mění s teplotou t. Při 50 % vlhkosti vzduchu a teplotě okolo 20°C je rychlost vzduchu určena vztahem

$$c = [344,36 + 0,63(t - 20^{\circ}\mathrm{C})]\mathrm{m.s}^{-1}, \tag{5}$$

kde t je teplota blízká 20°C.

K získání zřetelných obrazců je třeba, aby trubice a použitý prášek byly suché. Korkový prášek rovnoměrně rozptýlíme po trubici.

Vztah mezi rychlostí zvuku v tyči a modulem pružnosti v tahu E tyče je

$$E = c_1^2 \cdot \rho, \tag{6}$$

kde ρ je hustota tyče, tyč musí být tenká. Protože ve vzorci se vyskytuje rychlost ve druhé mocnině, je přesnost určení E menší než přesnost určení c_1. Běžně lze dosáhnout přesnosti 6%.

Uzavřený rezonátor se používá pro přesné měření vlnových délek. Dvě souosé trubice se do sebe různě zasouvají, a tím vytváří různě dlouhý rezonátor. Jako zdroj zvuku na jednom konci rezonátoru slouží telefonní sluchátko napájené tónovým generátorem regulovatelné frekvence. Na druhém konci rezonátoru je připevněn mikrofon, který je připojen k mikroampérmetru.

Délku zvukové vlny můžeme měřit dvěma způsoby. První způsob předpokládá konstantí kmitočet zvuku. Při tomto měření vzájemně posouváme trubice a hledáme odpovídající rezonanci. Vztah pro výpočet rychlosti zvuku dostáváme po dosazení do rovnice (1)

$$c = 2(l_1 - l_2)\nu. \tag{7}$$

Při druhém způsobu měření předpokládáme konstantní délku rezonátoru. Na mikroampérmetru připojeném k mikrofonu sledujeme změnu proudu vzhledem ke změně kmitočtu zvuku ve zdroji. Nastane-li rezonance zvuku, je signál snímaný z mikrofonu maximální. Rezonance nastává při frekvencích ν_k, jímž odpovídá délka vlny λ_k vyhovuje podmínce

$$l = k\frac{\lambda_k}{2}, \qquad k = 1, 2, 3, \dots , \tag{8}$$

kde k je počet půlvn v rezonátoru. Za λ_k dosadíme z rovnice (1) do vztahu (8). Pro hledanou rychlost zvuku dostaneme vztah

$$c = 2l(\nu_{k+1} - \nu_k), \tag{9}$$

kde ν_{k+1} a ν_k jsou kmitočty, l délka rezonátoru. Poissonovu konstantu κ oxidu uhličitého určíme ze změřené rychlosti zvuku. Z výrazu (4) dosazením do stavové rovnice ideálních plynu dostaneme

$$\nu = \sqrt{\kappa\frac{p}{\rho}} = \sqrt{\kappa\frac{RT}{\mu}}, \tag{10}$$

kde μ je molekulová hmotnost plynu, R molární plynová konstanta ($R = 8,314\ \mathrm{J.K}^{-1}.\mathrm{mol}^{-1}$) a T je termodynamická teplota. Pro Poissonovu konstantu tedy platí vztah

$$\kappa = \frac{\nu^2\mu}{RT}. \tag{11}$$

Relativní atomová rychlost kyslíku je $\alpha_O = 16$, relativní atomová hmotnost uhlíku je $\alpha_C = 12,0$.

Naměřené hodnoty a zpracování výsledků

Před měřením byly v laboratoři tyto podmínky:

Teplota:	$(23 \pm 0,5)$ °C
Tlak místní:	$(742,3 \pm 0,1)$ torr
Relativní vlhkost vzduchu:	(60 ± 1) %

V tabulkách jsem si našla hodnoty následujích veličin a konstant:

Rychlost zvuku:	
Vzduch, $t = 0$°C	$c = 331,5$ m.s^{-1}
Vzduch, $t = 20$°C	$c = 343,6$ m.s^{-1}
CO_2 , $t = 0$°C	$c = 260,3$ m.s^{-1}
mosaz [1]	$c = 3392,9$ až $3453,7$ m.s^{-1}
Modul pružnosti v tahu E	
pro mosaznou tyč	$E = 99$ GPa

1. Rychlost šíření podélných zvukových vln v mosazné tyči metodou Kundtovy trubice.

   Délku mosazné tyče jsem měřila pásovým měřidlem. Změřila jsem ji od volného konce až po přední konec korkového pístu. Délka tyče je

$$l = (150,7 \pm 0,5) \text{ cm}.$$

   Vlnovou délku zvuku λ_1 v tyči jsem určila na základě vztahu (2) na

$$\lambda_1 = (301,4 \pm 1,0) \text{ cm}.$$

   Do Kundtovy trubice se „naskládalo“ 6 velkých půlvln. V místě kmiten byly vidět spousty malých vlnek. To svědčí o tom, že tyč nevydávala zvuk jedné jediné frekvence, ale zvuk více frekvencí. Rychlost zvuku měřím z té frekvence, která vytvořila v trubici 6 půlvln. Vzdálenost 2 sousedních uzlů byla

$$d = (15,2 \pm 0,5) \text{ cm}.$$

   Chybu odhadu vzdálenosti dvou sousedních uzlů jsem určila dle vztahu

$$\sigma^2 = \sigma^2_{\text{statistická}} + \sigma^2_{\text{odhadem}}, \text{kde } \sigma_{\text{statistická}} = 0,08 \text{ cm a } \sigma_{\text{odhadem}} = 0,5 \text{ cm}. \qquad (13)$$

   Chyba statistická je tedy zanedbatelná vzhledem k chybě odhadu.

   Vlnovou délku zvuku λ_2 ve vzduchu jsem určila na základě vztahu (2), kam místo l dosadím d na

$$\lambda_2 = (30,4 \pm 1,2) \text{ cm}.$$

[1] V tabulkách nebyla přímo hodnota šíření rychlosti zvuku v mosazi, ale byl zde uveden vztah, ze kterého na základě znalosti modulu pružnosti v tahu E pro danou látku a ze znalosti hustoty dané látky vypočítám rychlost šíření zvuku v daném prostředí:

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \qquad (12)$$

Po úpravě lze z tohoto vztahu získat vztah (6).

Rychlost šíření zvuku ve vzduchu, kterou jsem určila ze vztahu (5) je

$$c_2 = (346,3 \pm 0,5)\ \mathrm{m.s^{-1}}.$$

Rychlost šíření zvuku v tyči určím dle vztahu (3):

$$c_1 = (3433 \pm 12)\ \mathrm{m.s^{-1}}.$$

Chybu jsem vzpočítala ze vztahu

$$\sigma_{c_1}^2 = \sigma_{c_2}^2 \cdot \left(\frac{\partial c_1}{\partial c_2}\right)^2 + \sigma_{\lambda_1}^2 \cdot \left(\frac{\partial c_1}{\partial \lambda_1}\right)^2 + \sigma_{\lambda_2}^2 \cdot \left(\frac{\partial c_1}{\partial \lambda_2}\right)^2 \tag{14}$$

Z těchto hodnot jsem určila modul pružnosti v tahu E tyče ze vztahu (6):

$$E = (9,96 \pm 0,84) \cdot 10^{10}\ \mathrm{Pa}.$$

Zjištěná hodnota modulu pružnosti tyče v tahu se v rámci chyby shoduje s tabelovanou hodnotou $E = 9,9 \cdot 10^{10}$ Pa. Hodnotu E jsem počítala pro střední hodnotu hustoty mosazi (8300 až 8600 kg.m^{-3}).

2. Rychlost zvuku ve vzduchu metodou uzavřeného rezonátoru.

A) Konstantní frekvence $\nu = (1842 \pm 1)$ Hz.

Frekvence v rezonanci na měřícím přístroji přeskakovala v rozsahu ± 1 Hz.

Nejprve jsem nastavila délku rezonátoru na $l_1 = (70,00 \pm 0,05)$ cm, pak jsem našla rezonanční frekvenci pro tuto délku. Rezonanční frekvence byla $\nu = (1842 \pm 1)$ Hz. Následovně jsem začala zvětšovat délku rezonátoru a hledala další rezonanční délku. Druhá rezonance nastala při délce rezonátoru $l_1 = (79,30 \pm 0,05)$ cm. Rychlost zvuku je dle vztahu (7)

$$c = (342,6 \pm 0,2)\ \mathrm{m.s^{-1}}.$$

Chybu odhadu rychlosti jsem určila ze vztahu

$$\sigma_c^2 = \sigma_{\Delta l_{\mathrm{odhadem}}}^2 \cdot \left(\frac{\partial c}{\partial \Delta l}\right)^2 + \sigma_\nu^2 \cdot \left(\frac{\partial c}{\partial \nu}\right)^2, \tag{15}$$

B) Konstantní délka rezonátoru $l = (80,00 \pm 0,05)$ cm pro vzduch a $l = (79,30 \pm 0,05)$ cm pro CO_2.

V Tabulce 1 jsou zaznamenány hodnoty rezonančních frekvencí společně s násobkem půlvln v rezonátoru.

Tabulka 1. Přehled naměřených hodnot rezonančních frekvencí.

VZDUCH, $l = (80,00 \pm 0,05)$ cm			CO_2, $l = (79,30 \pm 0,05)$ cm		
k	ν [Hz]	c [m.s^{-1}]	k	ν [Hz]	c [m.s^{-1}]
1	199	318,4	1	164	262,4
2	407	325,6	2	338	270,4
3	605	322,7	3	508	270,9
4	803	321,2	4	675	270,0
5	1001	320,3	5	838	268,2
6	1203	320,8	6	1032	275,2
7	1408	321,8	7	1181	269,9
8	1603	320,6	8	1344	268,8
9	1806	321,1	9	1512	268,8
10	2007	321,1	10	1680	268,8
11	2211	321,6	11	1851	269,2
12	2413	321,7	12	2022	269,6
13	2606	320,7	13	2187	269,2
14	2817	321,9	14	2357	269,4
15	3016	321,7	15	2525	269,3
16	3221	322,1	16	2696	269,6
17	3418	321,7	17	2859	269,1
18	3621	321,9	18	3033	269,6
19	3826	322,2	19	3202	269,6
20	4030	322,4	20	3372	269,8
21	4224	321,8	21	3532	269,1
			22	3707	269,6
			23	3875	269,6
			24	4040	269,3

Metodou lineární regrese jsem určila rozdíl $(\nu_{k+1} - \nu_k)$, který potřebuji k výpočtu rychlosti dle vztahu (9):

$$(\nu_{k+1} - \nu_k) = (201 \pm 3)\ \text{Hz}$$

Rychlost zvuku určíme dle (9):

$$c_{\text{ve vzduchu}} = (322 \pm 5)\ \text{m.s}^{-1}$$

Pro CO_2 jsou hodnoty následující:

$$(\nu_{k+1} - \nu_k) = (168 \pm 1)\ \text{Hz}$$

$$c_{\text{v CO}_2} = (266 \pm 1)\ \text{m.s}^{-1}$$

Chyby rychlostí byly vypočítány dle vztahu

$$\sigma_c^2 = \sigma_{(\nu_{k+1}-\nu_k)}^2 \cdot \left(\frac{\partial c}{\partial(\nu_{k+1} - \nu_k)}\right)^2 . \tag{16}$$

Grafické znázornění závislostí rychlosti šíření zvuku v prostředí na frekvenci je v GRAFU 1 a GRAFU 2.

3. Poissonova konstanta κ CO_2 z naměřené rychlosti zvuku.

   Ze vztahu (11) určím velikost Poissonovy konstanty pro CO_2:

   $$\kappa = (1,27 \pm 0,01).$$

   Chybu u Poissonovy konstanty vypočítám dle vztahu

   $$\sigma_\kappa^2 = \sigma_c^2 \cdot \left(\frac{\partial\kappa}{\partial c}\right)^2 + \sigma_T^2 \cdot \left(\frac{\partial\kappa}{\partial T}\right)^2, \tag{17}$$

Diskuse

1. Rychlost šíření podélných zvukových vln v mosazné tyči jsem změřila na $c_1 = (3433 \pm 12)$ m.s^{-1}.

   Během měření jsem si všimla, že v místech kmiten stojatých půlvln jsou vidět i vlnky mnohem vyšší frekvence harmonického vlnění (sinusoidálního tvaru). Tyto vlnky jsou jsou důkazem toho, že tyč je zdrojem vícefrekvenčního vlnění. Důležité je, aby délka trubice byla celistvým násobkem vlnové délky takového vlnění. Vypočtená hodnota modulu pružnosti v tahu $E = (9,96 \pm 0,84) \cdot 10^{10}$ Pa mosazné tyče souhlasí s tabelovanou hodnotou $E = 9,9 \cdot 10^{10}$ Pa.

2. Pomocí uzavřeného rezonátoru jsem změřila rychlost šíření ve vzduchu a v oxidu uhličitém CO_2:

   A) Měření metodou konstantní frekvence $\nu = (1842 \pm 1)$ Hz.

   $$c_{\text{ve vzduchu}} = (342,6 \pm 0,2)\ \text{m.s}^{-1}.$$

   Tato hodnota s v rámci chyby shoduje s tabelovanou hodnotou.

   B) Měření metodou konstantní délky rezonátoru $l = (80,00 \pm 0,05)$ cm pro vzduch a $l = (79,30 \pm 0,05)$ cm pro CO_2.

   $$c_{\text{ve vzduchu}} = (322 \pm 5)\ \text{m.s}^{-1}$$

   Tato hodnota s v rámci chyby liší od tabelované hodnoty pro 20^oC o cca 20 m.s^{-1}.

   $$c_{\text{v CO}_2} = (266 \pm 1)\ \text{m.s}^{-1}$$

   Tato hodnota s v rámci chyby liší od tabelované hodnoty pro 0^oC o cca 5 m.s^{-1}. Výsledky měření metodou konstantní délky jsou zaznamenány v Grafech 1 a Grafech 2.

   V obou grafech si můžeme všimnout 2 bodů, které se trochu více vzdalují od regresní přímky. Vynecháme-li tyto 2 body z daného statistického souboru, změní se hodnota $(\nu_{k+1} - \nu_k)$ o cca 0,2 Hz. Při zaokrouhlování na jednotky to nemá na odhad hodnoty žádný vliv.

3. Vypočítala jsem hodnotu Poissonovy konstanty:

   $$\kappa = (1,27 \pm 0,01).$$

   Tato hodnota se trošku liší od tabelované hodnoty pro teplotu 20°C: $\kappa = 1,29$

Závěr

1. Změřila jsem rychlost šíření zvuku v mosazné tyči: $c_1 = (3433 \pm 12)$ m.s^{-1}

   Modul pružnosti v tahu: $E = (9,96 \pm 0,84) \cdot 10^{10}$ Pa

2. Změřila jsem rychlost zvuku ve vzduchu

   a) metodou konstantní frekvence: $c_{\text{ve vzduchu}} = (342,6 \pm 0,2)$ m.s^{-1},

   b) metodou konstantní délky rezonátoru: $c_{\text{ve vzduchu}} = (322 \pm 5)$ m.s^{-1}.

   Změřila jsem rychlost zvuku v CO_2

   $c_{\text{v CO}_2} = (266 \pm 1)$ m.s^{-1}

3. Vypočítala jsem hodnotu Poissonovy konstanty pro oxid uhličitý: $\kappa = (1,27 \pm 0,01)$.

Použitá literatura

[1] Brož J. a kol.: Základy fyzikálních měření I. SPN, Praha 1967.

[2] B. Sprušil, P. Zieleniecová: Úvod do teorie fyzikálních měření. SPN, Praha 1997.

[3] J. Brož, V. Roskovec, M. Valoucký: Fyzikální a matematické tabulky, SNTL, Praha 1980.