Pracovní úkol

1. Změřte modul pružnosti v tahu E oceli z protažení drátu.
2. Změřte modul pružnosti v tahu E oceli a duralu nebo mosazi z průhybu trámku.
3. Výsledky měření zpracujte užitím lineární regrese.
4. Výsledky měření graficky znázorněte.

Teoretické základy měření

1. Měření modulu pružnosti v tahu E z protažení drátu.

Působím-li na ocelový drát délky l_0 a průřezu S silou F, mohu modul pružnosti v tahu E vypočítat ze vzorce

$$E = \frac{l_0 F}{\Delta l S}, \tag{1}$$

kde Δl je protažení drátu. Vztah platí pouze tehdy, je-li závislost protažení drátu Δl na působící síle F lineární.

Zařízení pro měření modulu pružnosti je znázprněno na obr. 1 studijního textu k této úloze. Ocelový drát je na jedné straně pevně uchycen a na druhé straně vede přes kladku. Sílu F je možno realizovat závažím, které na tuto stranu přidáváme.

Měří se metodou zrcátka a stupnice. Stupnice je umístěna ve vzdálenosti L od zrcátka tak, aby bylo možné pozorovat obraz stupnice v zrcátku dalekohledem. Protažení drátu zatěžováním způsobí pootočení zrcátka.

V rovnovážné poloze pozorujeme na stupnici dílek n_0. Po pootočení zrcátka vidíme dílek n. Úhel pootočení $\Delta\alpha$ můžeme spočíst dle následujícího vztahu (platí pouze pro úhly menší než 2^o):

$$\Delta\alpha = \frac{n - n_0}{2L}. \tag{2}$$

Prodloužení drátu pak můžu získat dle vztahu

$$\Delta l = R\Delta\alpha, \tag{3}$$

kde R je poloměr kladky.

Měření jsem prováděla metodou postupnou.

2. Měření modulu pružnosti v tahu E z prohnutí trámku.

Ocelový trámek šířky a a výšky b podepřeme dvěma břity ve vzdálenosti l od sebe (viz obr. 2 ve studijním textu k této úloze).

Pokud na trámek působíme uprostřed mezi břity silou F, modul pružnosti v tahu E lze vypočítat ze vztahu

$$E = \frac{Fl^3}{4yab^3}, \tag{4}$$

kde y je průhyb trámku po zatížení silou F.

Naměřené hodnoty a zpracování výsledků

Při měření byly v laboratoři tyto podmínky:

Teplota:	$(22 \pm 0,5)$ °C
Tlak místní:	$(743,1 \pm 0,1)$ torr
Tlak přepočtený na hladinu moře:	$(763,7 \pm 0,1)$ torr
Relativní vlhkost vzduchu:	(46 ± 1) %

V tabulkách jsem si našla hodnoty modulu pružnosti v tahu:

Ocel:	$E = 210$ GPa
Mosaz:	$E = 99$ GPa

1. Měření modulu pružnosti v tahu E z protažení drátu.

Délku drátu l_0 jsem změřila pásovým měřítkem. Měřila jsem ji od uchycení drátu (poslední zub) do místa uchycení kladky (včetně poloviny délky oblouku, kde se drát dotýká kladky). Naměřené hodnoty jsou v Tabulce 1.

Průměr drátu jsem měřila mikrometrickým měřidlem. Měřila jsem ho ve 4 polohách: cca 10 cm a 30 cm od levého okraje drátu a cca 10 cm a 30 cm od pravého okraje drátu. V každé poloze jsem průměr drátu měřila radiálně ve 3 různých směrech. Naměřené hodnoty jsou v Tabulce 1.

Tabulka 1. Přehled naměřených hodnot délek a průměrů drátu.

Délka drátu.				Průměr drátu.			
i	l_0 [cm]	i	l_0 [cm]	i	d_0 [mm]	i	d_0 [mm]
1	113,3	6	113,3	1	0,510	7	0,513
2	113,4	7	113,4	2	0,510	8	0,510
3	113,3	8	113,4	3	0,510	9	0,510
4	113,3	9	113,3	4	0,515	10	0,515
5	113,4	10	113,4	5	0,515	11	0,515
				6	0,515	12	0,510
$l_0 = (113,35 \pm 0,05)$ cm				$d_0 = (0,512 \pm 0,003)$ mm			

Průměr kladky jsem měřila posuvným měřidlem s noniem. Měření jsem provedla desetkrát. Výsledný průměr kladky určíme jako aritmetický průměr naměřených hodnot:

$$D = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} D_i \tag{5}$$

Pravděpodobná chyba této veličiny σ_D je dána vztahem

$$\sigma_D = \sqrt{\sigma_{\mathrm{stat}}^2 + \sigma_{\mathrm{odh}}^2} \tag{6}$$

Za σ_{stat} vezmeme pravděpodobnou chybu aritmetického průměru, kterou dle [1] určíme ze vztahu

$$\sigma_{\mathrm{stat}} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\sum \Delta(D_i - \overline{D})^2}{n(n-1)}}, \tag{7}$$

kde n je počet měření. Dostanu takto $\sigma_{\mathrm{stat}} = 0,6\mu\mathrm{m}$. Chybu odhadem σ_{odh} měření posuvným měřítkem odhadnu na 0,1 mm. Statistická chyba je tedy zanedbatelná. Pravděpodobnou chybu σ_D tedy odhadnu jako chybu měření posuvným měřítkem na $\sigma_D = 0,1\mathrm{mm}$.

$$\begin{array}{ll} D_1 = (39,5 \pm 0,1)\ \mathrm{mm} & D_6 = (39,5 \pm 0,1)\ \mathrm{mm} \\ D_2 = (39,6 \pm 0,1)\ \mathrm{mm} & D_7 = (39,5 \pm 0,1)\ \mathrm{mm} \\ D_3 = (39,6 \pm 0,1)\ \mathrm{mm} & D_8 = (39,4 \pm 0,1)\ \mathrm{mm} \\ D_4 = (39,5 \pm 0,1)\ \mathrm{mm} & D_9 = (39,4 \pm 0,1)\ \mathrm{mm} \\ D_5 = (39,4 \pm 0,1)\ \mathrm{mm} & D_{10} = (39,5 \pm 0,1)\ \mathrm{mm} \end{array}$$

Vzdálenost zrcátka a stupnice jsem změřila pásovným měřítkem je $L = (69,0 \pm 0,1)$ cm.

Modul pružnosti v tahu E vypočtu ze vztahu (1), kde l_0 je počáteční délku drátu, S jeho průřez a za F sílu, která způsobí protažení o Δl. Protažení měřím metodou postupných měření. Pro Δl_i platí vztah (4). Úhel pootočení $\Delta\alpha$ dostaneme ze vztahu (3). Naměřené hodnoty prodloužení při zatěžování a odlehčování (pouze prvních 25 hodnot měření z 50, pro ostatní jsem neměřila stejné hodnoty pro zatěžování a odlehčování, ale jen jedním směrem) ocelového drátu jsem zaznamenala do Tabulky 2.

Tabulka 2. Závislost protažení drátu Δl na působící síle F.

i	F [N]	Δl[mm] (zatěžování)	Δl[mm] (odlehčování)
1	9,81	0,000	0,000
2	10,79	0,085	0,057
3	11,77	0,172	0,120
4	12,75	0,257	0,229
5	13,73	0,314	0,286
6	14,72	0,401	0,371
7	15,70	0,486	0,458
8	16,68	0,543	0,543
9	17,66	0,600	0,630
10	18,64	0,687	0,687
11	19,62	0,772	0,772
12	20,60	0,859	0,829
13	21,58	0,916	0,916

V Grafu 1 je znázorněna závislost $\Delta l = f(F)$. Naměřené hodnoty mohu proložit lineární funkcí $\Delta l = A + B \cdot F$, kde pro zatěžování jsou hodnoty konstant $A = (-3,71 \pm 0,07) \cdot 10^{-1}$ mm a $B = (3,85 \pm 0,04) \cdot 10^{-2}$ mm.N^{-1} a pro odlehčování $A = (-3,97 \pm 0,08) \cdot 10^{-1}$ mm a $B = (3,98 \pm 0,05) \cdot 10^{-2}$ mm.N^{-1}.

Z Grafu 1 je patrné, že závislost je lineární, drát tedy v tomto rozsahu napětí můžu považovat za hookeovskou a k výpočtu modulu pružnosti v tahu E můžeme použít vztah (1). Protažení Δl můžeme spočíst dle vzorce pro postupná měření ([1], (4,3))

$$\Delta l = \left(\frac{2}{n}\right)^2 \cdot \left(\sum_{i=\frac{n}{2}+1}^{n} \Delta l_i - \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \Delta l_i\right), \tag{8}$$

kde $n = 13$.

Pravděpodobnou chybu protažení $\sigma_{\Delta l}$ je rovna prevděpodobné chybě aritmetického průměru, která je dle ([1])

$$\sigma_{\Delta l} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{\sum \sigma^2_{\Delta l_i}}{n(n-1)}}, \tag{9}$$

kde $\sigma^2_{\Delta l_i}$ je rovno součtu kvadrátů odhadu maximální absolutní chyby $i-$tého měření protažení drátu $\sigma_{\Delta l_{i(\mathrm{odh})}}$ a statistické chyby $\sigma_{\Delta l_{i(\mathrm{stat})}}$:

$$\sigma^2_{\Delta l_i} = \sigma^2_{\Delta l_i\ (\mathrm{stat})} + \sigma^2_{\Delta l_i\ (\mathrm{odh})}. \tag{10}$$

Hodnotu $\sigma^2_{\Delta l_i\ (\mathrm{stat})}$ spočtu jako odchylku aritmetického průměru: $\sigma_{\Delta l_i\ (\mathrm{stat})} = \Delta l_i - \Delta l$.

Hodnotu $\sigma^2_{\Delta l_i\ (\mathrm{odh})}$ spočtu pomocí relativních chyb. Relativní chyba $i-$tého protažení $\eta_{\Delta l_i} \cdot \sigma_{\Delta l_i\ (\mathrm{odh})}$ je podle (2) a (3) součtem relativní chyby měření rozdílů dílků na stupnici $\eta_{n_i - n_0}$, vzdálenosti zrcátka od stupnice η_L a poloměru kladky η_R:

$$\sigma_{\Delta l_i\ (\mathrm{odh})} = \frac{1}{\Delta l_i}\left(\eta_{n_i-n_0} + \eta_L + \eta_R\right),\ \text{kde} \tag{11}$$

$$\eta_{n_i-n_0} = \frac{2\epsilon_n}{n_i - n_0},\ \text{kde}\ \epsilon_n = 0,5\ \mathrm{mm} \tag{12}$$

je odhad absolutní maximální chyby odečítání hodnot ze stupnice.

Spočtu zvlášť hodnoty pro zatěžování a zvlášť hodnoty pro odlehčování. Dostanu tak (vynechala jsem 1. měření, aby n bylo sudé)

$$\Delta l_{(\text{zatěžování})} = (37 \pm 1,5)\ \mu\mathrm{m}, \tag{13}$$

$$\Delta l_{(\text{odlehčování})} = (40 \pm 1,5)\ \mu\mathrm{m}. \tag{14}$$

Jejich aritmetický průměr $\Delta l_{(\text{průměr})} = (38,5 \pm 1,5)\ \mu$m použiju pro výpočet modulu pružnosti v tahu E dle vzorce (1). Pro pravděpodobnou chybu modulu pružnosti v tahu platí dle ([1], (3,57)) vztah

$$\sigma_E = \sqrt{\left(\frac{\partial E}{\partial l_0}\right)^2 \cdot \sigma^2_{l_0} + \left(\frac{\partial E}{\partial d}\right)^2 \cdot \sigma^2_d + \left(\frac{\partial E}{\partial \Delta l}\right)^2 \cdot \sigma^2_{\Delta l}}, \tag{15}$$

$$\text{kde}\ E(l_0, d, \Delta l) = \frac{4 l_0 F}{\pi d^2 \Delta l}. \tag{16}$$

Chybu F zanedbáváme. Závisí na chybě 100 g závaží, která jsem používala. Tuto chybu mohu v dobrém přiblížení zanedbat.

Ze vztahů (1) a (15) vyplývá hodnota modulu pružnosti v tahu E:

$$E = (226 \pm 14)\ \mathrm{GPa}.$$

2. Měření modulu pružnosti v tahu E z prohnutí trámku.

Vzdálenost břitů l jsem změřila pásovým měřítkem. Měřila jsem ji od vnitřního okraje levého břitu k vnitřnímu okraji pravého břitu. Naměřené hodnoty jsou v Tabulce 3.

TABULKA 3. Přehled naměřených hodnot vzdáleností břitů.

Délka drátu.			
i	l [cm]	i	l [cm]
1	41,0	6	40,9
2	40,9	7	40,9
3	40,9	8	41,0
4	40,8	9	41,0
5	40,9	10	41,0
$l = (40,93 \pm 0,07)$ cm			

Šířku trámku a a výšku trámku b jsem měřila posuvným měřidlem s noniem a mikrometrickým měřidlem. Pro každý trámek jsem provedla 10 měření šířky a a 10 měření výšky b. Naměřené hodnoty jsou zaznamenány v TABULCE 4.

Výslednou šířku a a její chybu vypočtu podobně jako průměr kladky v předchozím úkolu. Chybu měření odhadneme jako chybu měření mikrometrem na $\sigma_{(\mathrm{odh})} = 0,01$ mm. Hodnota $\sigma_{(\mathrm{stat})}$ je pravděpodobná chyba aritmetického průměru spočtená dle (7). Hodnota σ_a potom bude

$$\sigma_{a_{(\mathrm{ocel})}} = \sqrt{\sigma_{\mathrm{stat}}^2 + \sigma_{\mathrm{odh}}^2} = \sqrt{(76 \cdot 10^{-6})^2 + (10 \cdot 10^{-6})^2} = 0,17 \text{ mm}$$

$$\sigma_{a_{(\mathrm{mosaz})}} = \sqrt{\sigma_{\mathrm{stat}}^2 + \sigma_{\mathrm{odh}}^2} = \sqrt{(76 \cdot 10^{-6})^2 + (10 \cdot 10^{-6})^2} = 0,06 \text{ mm}$$

TABULKA 4. Přehled naměřených hodnot šířek trámků a a výšek trámků b.

Ocel.			Mosaz.		
i	a [mm]	b [mm]	i	a [mm]	b [mm]
1	12,00	2,97	1	11,90	1,985
2	11,80	2,97	2	11,80	1,980
3	11,75	2,98	3	11,80	1,990
4	11,75	2,98	4	11,90	1,985
5	11,80	2,97	5	11,80	1,990
6	11,75	2,97	6	11,90	1,985
7	11,80	2,98	7	11,80	1,995
8	11,80	2,98	8	11,80	1,990
9	11,75	2,97	9	11,85	1,980
10	11,75	2,98	10	11,96	1,990
$a = (11,80 \pm 0,17)$ mm $b = (2,975 \pm 0,01)$ mm			$a = (11,85 \pm 0,06)$ mm $b = (1,987 \pm 0,01)$ mm		

Modul pružnosti E spočteme ze vztahu (4). Průhyb trámku y určíme opět postupnou metodou. Naměřené hodnoty průhybu trámků jsou uvedeny v TABULCE 5.

TABULKA 5. Závislost prohnutí y na působící síle F pro ocelový trámek.

Ocel.							
i	F [N]	y[mm] (zatěž.)	y[mm] (odleh.)	i	F [N]	y[mm] (zatěž.)	y[mm] (odleh.)
1	0,00	0,00	0,00	12	9,81	2,70	2,74
2	0,98	0,25	0,14	13	10,79	3,00	2,94
3	1,96	0,55	0,54	14	11,77	3,25	3,24
4	2,94	0,85	0,84	15	12,75	3,50	3,44
5	3,92	1,10	1,04	16	13,73	3,75	3,64
6	4,91	1,35	1,34	17	14,72	3,95	3,94
7	4,91	1,35	1,34	18	15,70	4,30	4,24
8	5,89	1,65	1,54	19	16,68	4,55	4,54
9	6,87	1,85	1,84	20	17,66	4,80	4,84
10	7,85	2,15	2,14	21	19,62	5,35	5,34
11	8,83	2,45	2,44				

TABULKA 6. Závislost prohnutí y na působící síle F pro mosazný trámek.

Mosaz.			
i	F [N]	y[mm] (zatěž.)	y[mm] (odleh.)
1	0,00	0,00	0
2	0,98	1,75	1,8
3	0,98	1,70	1,8
4	1,96	3,55	3,55
5	1,96	3,60	3,6

Průhyb určíme z následujícího vztahu:

$$y = \left(\frac{2}{n}\right)^2 \cdot \left(\sum_{i=\frac{n}{2}+1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} y_i\right), \tag{17}$$

kde pro ocel $n = 20$ a pro mosaz $n = 4$ (měření je lichý počet, tak první měření vynechám). Pravděpodobnou chybu průhybu vypočteme ze vzorce

$$\sigma_y = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{\sum \sigma_{y_i}^2}{n(n-1)}}, \tag{18}$$

$$\text{kde } \sigma_{y_i}^2 = \sigma_{y_i\ (\mathrm{stat})}^2 + \sigma_{y_i\ (\mathrm{odh})}^2 \tag{19}$$

Hodnotu $\sigma_{y_i\ (\mathrm{odh})}$ odhadnu na polovinu nejmenšího dílku na stupnici: $\sigma_{y_i\ (\mathrm{odh})} = 0,05$ mm. Hodnota $\sigma_{y_i\ (\mathrm{stat})}$ je odchylka od průměru y.

Spočtu zvlášť hodnoty pro zatěžování a zvlášť hodnoty pro odlehčování. Dostanu tak (vynechala jsem 1. měření, aby n bylo sudé)

$$y_{\text{ocel (zatěžování)}} = (256 \pm 6)\ \mu\text{m}, \tag{20}$$
$$y_{\text{ocel (odlehčování)}} = (257 \pm 7)\ \mu\text{m}, \tag{21}$$
$$y_{\text{mosaz (zatěžování)}} = (925 \pm 8)\ \mu\text{m}, \tag{22}$$
$$y_{\text{mosaz (odlehčování)}} = (888 \pm 9)\ \mu\text{m}. \tag{23}$$

Jejich aritmetický průměr $y_{\text{ocel (průměr)}} = (256,5 \pm 6,5)\ \mu\text{m}$ a $y_{\text{mosaz (průměr)}} = (906,5 \pm 8,5)\ \mu\text{m}$ použiju pro výpočet modulu pružnosti v tahu E dle vzorce (4). Pro pravděpodobnou chybu modulu pružnosti v tahu platí dle ([1], (3,57)) vztah

$$\sigma_E = \sqrt{\left(\frac{\partial E}{\partial l}\right)^2 \cdot \sigma_l^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial y}\right)^2 \cdot \sigma_y^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial a}\right)^2 \cdot \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial b}\right)^2 \cdot \sigma_b^2}, \tag{24}$$

$$\text{kde } E(l, y, a, b) = \frac{Fl^3}{4yab}. \tag{25}$$

Chybu F opět zanedbáváme. Ze vztahů (4) a (24) vyplývá hodnota modulu pružnosti v tahu E:

$$E_{\text{ocel}} = (211 \pm 7)\ \text{GPa}.$$
$$E_{\text{mosaz}} = (200 \pm 4)\ \text{GPa}.$$

Diskuse

Druhá metoda je přesnější. Relativní chyba je zhruba dvakrát menší:

a) metodou protažení drátu: $\eta_E = 6,2\%$

b) metodou průhybu trámku: $\eta_{\text{ ocel}} = 3,3\%$, $\eta_{\text{ mosaz}} = 2,0\%$.

Pokud zpřesním měření průměru drátu, mohlo by se zpřesnit měření E (poloměr se vyskytuje ve kvadrátu, vliv jeho chyby je poměrně velký).

Pokud by výška mosazného trámku byla $b = (2,50 \pm 0,01)$ mm, byla by hodnota modulu pružnosti v tahu E mosazi stejná jako tabulková (v rámci chyby):

$$E_{\text{mosaz, } b_{\text{oprav.}}} = (100 \pm 2)\ \text{GPa}.$$

Modul pružnosti tedy závisí na rozměrech šířce a a třetí mocnině výšky b, závisí tedy na plošném momentu setrvačnosti I_p průřezové plochy tyče vzhledem k vodorovné ose, kolmé k délce trámku a procházející těžištěm (viz rovnici (9) studijního textu k této úloze).

Naměřené hodnoty modulu pružnosti v tahu E pro drátek (ocelový) a pro ocelový trámek v rámci chyby odpovídají tabulkové hodnotě. Pro mosazný trámek se naměřená hodnota od tabulkové velmi liší.

Při měření metodou protažení drátu jsem mohla zanedbat změnu průřezu kvůli protažení, protože činí cca 0,1 % původní hodnoty (před napínáním).

Závěr

Změřila jsem modul pružnosti v tahu E:

a) metodou protažení drátu:

$$E = (226 \pm 14)\ \mathrm{GPa}.$$

b) metodou průhybu trámku:

$$E_{\mathrm{ocel}} = (211 \pm 7)\ \mathrm{GPa}.$$

$$E_{\mathrm{mosaz}} = (200 \pm 4)\ \mathrm{GPa}.$$

Tabulkové hodnoty jsou:

Ocel:	$E = 210$ GPa
Mosaz:	$E = 99$ GPa

Ověřila jsem, že velikost modulu pružnosti v tahu E měřená metodou průhybu trámku závisí na plošném momentu setrvačnosti I_p.

Závislost protažení drátu Δl na působící síle F je v Grafu 1. Závislost prohnutí trámku y na působící síle F je v Grafu 2.

Použitá literatura

[1] Brož J. a kol.: Základy fyzikálních měření I. SPN, Praha 1983.

[2] B. Sprušil, P. Zieleniecová: Úvod do teorie fyzikálních měření. SPN, Praha 1987.

[3] J. Brož, V. Roskovec, M. Valoucký: Fyzikální a matematické tabulky, SNTL, Praha 1980.