Pracovní úkol

1. Změřte dobu kmitu T_0 dvou stejných nevázaných fyzických kyvadel.
2. Změřte doby kmitů T_i dvou stejných fyzických kyvadel vázaných slabou pružnou vazbou, vypouštěných z klidu při počátečních podmínkách:
   (a) $y_1 = y_2 = B$ ... doba kmitu T_1
   (b) $y_1 = -y_2 = B$ ... doba kmitu T_2
   (c) $y_1 = 0$, $y_2 = B$ ... doba kmitu T_3

   ... doba $T_4/2$, za kterou dojde k maximální výměně energie mezi kyvadly.
3. Vypočtěte kruhové frekvence ω_0, ω_1, ω_2, ω_3 a ω_4 odpovídající dobám T_0, T_1, T_2, T_3 a T_4 a ověřte měřením platnost vztahů odvozených pro ω_3 a ω_4.
4. Vypočtěte stupeň vazby κ.
5. Pro jednu pružinu změřte závislost stupně vazby na vzdálenosti zavěčení pružiny od uložení závěsu kyvadla a graficky znázorněte.

Teoretické základy měření

Mějme dvě stejná fyzická kyvadla vázaná slabou pružnou vazbou, která kývají pouze v jedné rovině. Dále předpokládejme, že výchylky obou kyvadel jsou malé a tření v uložení závěsů kyvadel zanedbáváme. Bez vazby obě kyvadla vykonávají harmonické kmity s kruhovou frekvencí

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{I}} \tag{1}$$

kde D je direkční moment a I moment setrvačnosti kyvadla. Vazba způsobí, že v klidové poloze jsou obě kyvadla vychýlena o úhel α proti sobě. V klidové poloze pro obě kyvadla se vyruší výsledný moment vnějších sil. Řešením pohybových rovnic pro obě kyvadla získám vztahy pro kruhové frekvence:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{D}{I}} \tag{2}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{D + 2D^*}{I}} \tag{3}$$

kde D^* je direkční moment pružiny. Když do řešení pohybových rovnic pro obě kyvadla dosadím počáteční podmínky v jednotlivých případech, dostanu předpokládané výsledky:

(a) Obě kyvadla se pohybují tak, jako by vazba mezi nimi nebyla realizována. Pokud pro obě kyvadla zadám stejnou počáteční výchylku, pak kývají ve fázi s frekvencí ω_1 (protože mají stejnou dobu kmitu).

(b) Obě kyvadla kývají se stejnou amplitudou a stejnou frekvencí ω_2, ale jsou fázově posunutá o π, neboli kývají v protifázi. Tento výsledek je možné opět nahlédnout úvahou, když kyvadla vypustím s opačnou počáteční výchylkou.

(c) Je-li vazba slabá, tj. ω_2 je jen o málo větší než ω_1, lze řešení pohybových rovnic interpretovat tak, že obě kyvadla kývají se stejnou frekvencí

$$\omega_3 = \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1) \tag{4}$$

a amplitudy jejich pohybu se mění periodicky s časem s frekvencí

$$\omega_4 = \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1) \tag{5}$$

Stupeň vazby κ je definován jako

$$\kappa = \frac{D^*}{D + D^*} = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2} \tag{6}$$

Naměřené hodnoty a zpracování výsledků

Před měřením byly v laboratoři tyto podmínky:

Teplota:	$(23 \pm 0,5)$ °C
Tlak místní:	$(742,3 \pm 0,1)$ torr
Relativní vlhkost vzduchu:	(60 ± 1) %

Naměřené hodnoty jsou zaznamenány v následujících tabulkách.

TABULKA 1. Přehled naměřených hodnot dob kmitů nevázaných fyzických kyvadel.

	Levé kyvadlo	Pravé kyvadlo
i	$20.T_{0,L}$ [s]	$20.T_{0,P}$ [s]
1	38,43	38,15
2	38,24	38,03
3	38,38	38,08
4	38,12	38,23
5	38,15	38,21
6	38,57	38,24
7	38,15	38,20
8	38,34	38,13
9	38,46	38,25
10	38,23	38,23
$T_{0,L} = (1,92 \pm 0,01)$ s		
$T_{0,P} = (1,91 \pm 0,01)$ s		

Hodnota periody je v rámci chyby stejná pro obě kyvadla. Chyba periody byla určena jako součet kvadrátů statistické chyby a chyby odhadem. Hodnoty kruhových frekvencí jsou v rámci chyby shodné pro obě kyvadla. U kruhových frekvencí je chyba určena jako chyba statistická. Hodnoty kruhových frekvencí můžeme považovat za kyvadla spojená vazbou pro vzdálenost upevnění pružiny od místa upevnění kyvadla $h = 0$ mm, a tedy i $\kappa = 0$:

$$\omega_{0,L} = (3,28 \pm 0,01) \text{ Hz},$$

$$\omega_{0,P} = (3,29 \pm 0,01) \text{ Hz}.$$

Následující hodnoty jsem měřila pro dvě pružiny, $P1$ a $P2$, při vzdálenosti pružiny od místa podepření kyvadla $h = 125$ mm.

Tabulka 2. Přehled naměřených hodnot dob kmitů vázaných fyzických kyvadel, $y_1 = y_2 = B$.

	Pružina 1	Pružina 2
i	$10.T_{1,P1}$ [s]	$10.T_{1,P2}$ [s]
1	19,14	19,06
2	19,22	19,03
3	19,25	18,92
4	19,04	19,05
5	19,12	19,16
6	19,18	19,23
7	19,27	19,05
8	19,23	19,18
9	19,26	18,99
10	19,13	19,20
$T_{1,P1} = (1,92 \pm 0,02)$ s		
$T_{1,P2} = (1,91 \pm 0,02)$ s		

Změřené periody opět odpovídají v rámci chyby stejné hodnotě, pro tyto periody jsem vypočetla kruhové frekvence:

$$\omega_{1,P1} = (3,28 \pm 0,01) \text{ Hz},$$

$$\omega_{1,P2} = (3,29 \pm 0,02) \text{ Hz}.$$

Tabulka 3. Přehled naměřených hodnot dob kmitů vázaných fyzických kyvadel, $y_1 = -y_2 = B$.

	Pružina 1	Pružina 2
i	$10.T_{2,P1}$ [s]	$10.T_{2,P2}$ [s]
1	18,65	19,29
2	18,93	19,09
3	19,15	18,92
4	18,73	19,42
5	18,70	19,60
6	18,53	18,84
7	18,65	19,06
8	18,69	19,47
9	18,70	19,26
10	18,65	19,28
$T_{2,P1} = (1,87 \pm 0,03)$ s		
$T_{2,P2} = (1,92 \pm 0,03)$ s		

Změřené periody se trochu více liší než v předchozích případech, pro tyto periody jsem vypočetla kruhové frekvence:

$$\omega_{2,P1} = (3,35 \pm 0,03) \text{ Hz},$$

$$\omega_{2,P2} = (3,27 \pm 0,04) \text{ Hz}.$$

TABULKA 4. Přehled naměřených hodnot dob kmitů vázaných fyzických kyvadel, $y_1 = 0, y_2 = B$.

	Pružina 1	Pružina 2
i	$10.T_{3,P1}$ [s]	$3.T_{3,P2}$ [s]
1	18,66	5,52
2	18,67	5,59
3	18,42	5,58
4	18,68	5,64
5	18,70	5,66
6	18,45	5,55
7	18,56	5,69
8	18,64	5,72
9	18,73	5,75
10	18,25	5,31
$T_{3,P1} = (1,86 \pm 0,03)$ s		
$T_{3,P2} = (1,87 \pm 0,08)$ s		

Změřené periody se opět příliš neliší, pro tyto periody jsem vypočetla kruhové frekvence:

$$\omega_{3,P1} = (3,38 \pm 0,03)\ \text{Hz},$$

$$\omega_{3,P2} = (3,37 \pm 0,08)\ \text{Hz}.$$

TABULKA 5. Přehled naměřených hodnot dob kmitů vázaných fyzických kyvadel, maximální výměna energie mezi kyvadly.

	Pružina 1	Pružina 2
i	$\frac{1}{4}.T_{4,P1}$ [s]	$\frac{1}{4}.T_{4,P2}$ [s]
1	28,35	8,05
2	28,23	8,07
3	28,24	8,04
4	28,22	8,12
5	28,25	8,13
6	28,34	8,20
7	28,73	8,10
8	28,24	8,15
9	28,55	8,21
10	28,32	8,23
$T_{4,P1} = (113,39 \pm 1,04)$ s		
$T_{4,P2} = (32,52 \pm 0,84)$ s		

Změřené periody se dost liší, pro tyto periody jsem vypočetla kruhové frekvence:

$$\omega_{4,P1} = (5,54 \pm 0,03) \cdot 10^{-2}\ \text{Hz},$$

$$\omega_{4,P2} = (19,32 \pm 0,16) \cdot 10^{-2}\ \text{Hz}.$$

Nyní uvádím přehled naměřených a vypočtených hodnot T_i a ω_i:

Levé kyvadlo:	$T_{0,L} = (1,92 \pm 0,01)$ s	$\omega_{0,L} = (3,28 \pm 0,01)$ Hz
Pravé kyvadlo:	$T_{0,P} = (1,91 \pm 0,01)$ s	$\omega_{0,P} = (3,29 \pm 0,01)$ Hz
Pružina $P1$:	$T_{1,P1} = (1,92 \pm 0,01)$ s	$\omega_{1,P1} = (3,28 \pm 0,01)$ Hz
	$T_{2,P1} = (1,87 \pm 0,03)$ s	$\omega_{2,P1} = (3,35 \pm 0,03)$ Hz
	$T_{3,P1} = (1,86 \pm 0,03)$ s	$\omega_{3,P1} = (3,38 \pm 0,03)$ Hz
	$T_{4,P1} = (113,39 \pm 1,04)$ s	$\omega_{4,P1} = (5,54 \pm 0,03) \cdot 10^{-2}$ Hz
Pružina $P2$:	$T_{1,P2} = (1,91 \pm 0,02)$ s	$\omega_{1,P2} = (3,29 \pm 0,02)$ Hz
	$T_{2,P2} = (1,92 \pm 0,03)$ s	$\omega_{2,P2} = (3,27 \pm 0,04)$ Hz
	$T_{3,P2} = (1,87 \pm 0,08)$ s	$\omega_{3,P2} = (3,37 \pm 0,08)$ Hz
	$T_{4,P2} = (32,52 \pm 0,84)$ s	$\omega_{4,P2} = (19,32 \pm 0,16) \cdot 10^{-2}$ Hz

Pro dané zavěšení $h = 125$ mm vychází pro pružinu $P1$ stupeň vazby $\kappa = (240,00 \pm 0,05) \cdot 10^{-3}$ a pro pružinu $P2$ je stupeň vazby $\kappa = (-6,00 \pm 0,08) \cdot 10^{-3}$. V dalším úkolu jsem měřila pružinu $P2$, ale když pro $h = 125$ mm vyšla hodnota κ záporná, budu ji muset vypustit ze statistického souboru.

Dále jsem měřila závislost stupně vazby κ na vzdálenosti upevnění h pružiny $P2$. Naměřené hodnoty jsem zaznamenala do následující tabulky:

TABULKA 6. Měření závislosti κ na h.

Pružina $P2$					
$h = 25$ mm			$h = 225$ mm		
i	$10.T_{1,P2}$ [s]	$10.T_{2,P2}$ [s]	i	$10.T_{1,P2}$ [s]	$10.T_{2,P2}$ [s]
1	18,99	19,16	1	18,93	18,36
2	18,99	19,24	2	18,91	18,44
3	19,04	19,27	3	18,95	18,63
4	19,09	19,14	4	18,56	18,38
5	19,00	19,03	5	18,63	18,46
$h = 325$ mm			$h = 425$ mm		
i	$10.T_{1,P2}$ [s]	$10.T_{2,P2}$ [s]	i	$10.T_{1,P2}$ [s]	$10.T_{2,P2}$ [s]
1	19,15	18,40	1	19,21	18,01
2	19,04	18,31	2	19,25	17,97
3	19,20	18,22	3	19,34	17,81
4	18,87	18,15	4	19,14	17,98
5	19,05	18,23	5	19,19	17,87
$h = 525$ mm					
i	$10.T_{1,P2}$ [s]	$10.T_{2,P2}$ [s]			
1	19,11	17,08			
2	19,26	17,26			
3	19,27	17,37			
4	19,30	17,23			
5	19,24	17,24			

Pro naměřené hodnoty period z předchozí tabulky jsem vypočítala kruhové rychlosti ω_1 a ω_2 a stupeň vazby κ:

TABULKA 7. Stupeň vazby κ v závislosti na vzdálenosti h podepření kyvadla.

h [mm]	ω_1 [Hz]	σ_{ω_1} [Hz]	ω_2 [Hz]	σ_{ω_2} [Hz]	$10^3\kappa$	$10^3\sigma_\kappa$
25	3,30	0,01	3,28	0,07	-7,63	0,21
225	3,34	0,03	3,40	0,02	18,31	0,06
325	3,30	0,02	3,44	0,02	42,84	0,03
425	3,27	0,01	3,50	0,02	69,79	0,02
525	3,27	0,01	3,65	0,02	109,36	0,03

Vynechala jsem hodnoty κ pro vzdálenosti $h = 25$ mm a $h = 125$ mm, protože hodnota κ musí být nezáporná. Grafické znázornění závislosti stupně vazby κ vzdálenosti pružiny h od místa upevnění kyvadla je v GRAFU 1. Naměřené hodnoty jsou proloženy parabolou s rovnicí

$$\kappa = -9,49 \cdot 10^{-5} - 0,005h + 0,407h^2.$$

Tato parabola prochází počátkem.

Diskuse

V první části úlohy jsem ověřila, že obě kyvadla mají stejnou dobu kmitu. Dalším měřením jsem prokázala, že doba kmitu T_1 v případě (a) se pro obě pružiny v rámci chyby shoduje s dobou kmitu T_0. To znamená, že kyvadla ve fázi nejsou ovliňována pružinou a chovají se, jako kdyby mezi nimi nebyla žádná vazba.

Vypočtená hodnota ω_2 pro pružinu 2 byla jen o málo nižší než hodnota ω_1. To může být způsobeno zanedbatelnou statistickou chybou měření času vzhledem k chybě experimentátora. Hodnoty ω_3 a ω_4 vypočítané z naměřených hodnot nejsou ve shodě s výsledky získanými výpočtem podle teorie. Buď zde došlo k systematické chybě při měření, nebo se ukázalo, že rozdíl úhlových frekvencí ω_2 a ω_1 není dostatečně malý, aby byly splněny předpoklady pro platnost vztahu (4).

Při měření T_4 se nedala očekávat příliš vysoká přesnost, protože nebyl dost zřetelně rozpoznatelný okamžik, kdy došlo k maximální výměně energie.

Měření stupně vazby κ lze považovat za úspěšné. Bylo dosaženo předpokládaného výsledku, že pro malou vzdálenost d umístění pružiny od závěsu kyvadla se hodnoty κ blíží k nule. Úvahou snadno nahlédneme, že pokud je vzálenost d nulová, tedy mezi kyvadly není žádná vazba, pak platí $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$ a tedy $\kappa = 0$. Zjistila jsem, že závislost stupně vazby κ na d lze dobře aproximovat kvadratickou funkcí procházející počátkem. Výsledek je znázorněn v GRAFU 1.

Závěr

Naměřené hodnoty a závislosti příliš neodpovídají teoretickým předpokladům, což může být způsobeno systematickou chybou v měření.

Použitá literatura

[1] Brož J. a kol.: Základy fyzikálních měření I. SPN, Praha 1983.

[2] B. Sprušil, P. Zieleniecová: Úvod do teorie fyzikálních měření. SPN, Praha 1997.

[3] J. Brož, V. Roskovec, M. Valoucký: Fyzikální a matematické tabulky, SNTL, Praha 1980.