Pracovní úkol

1. Změřte tuhost k pěti pružin metodou:
   - statickou
   - dynamickou
2. Z měření doby kmitů T tělesa hmotnosti m zavěšeného na pružině určete závislost úhlové frekvence ω na $\sqrt{\frac{k}{m}}$.
3. Z doby kmitu tělesa známé hmotnosti a výchylky pružiny po zavěšení tohoto tělesa určete místní tíhové zrychlení g.
4. Sestrojte grafy závislostí:
   - $\omega = f\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)$
   - $\omega = f\left(\sqrt{k}\right)$
   - $\omega = f\left(\sqrt{\frac{1}{m}}\right)$

Teoretické základy měření

Harmonický kmit je nejjednodušším lineárním kmitavým pohybem. Harmonický kmit vzniká působením síly F, která roste přímo úměrně s okamžitou výchylkou y tělesa z rovnovážné polohy, míří do rovnovážné polohy:

$$F = -ky, \tag{1}$$

kde k je konstanta úměrnosti nazvaná tuhost harmonického oscilátoru.

Zavěsíme-li těleso v tíhovém poli na pružinu, bude v rovnovážném stavu platit

$$k = g\frac{m}{y_0}, \tag{2}$$

kde k je tuhost pružiny, g tíhové zrychlení, m je hmotnost závaží a y_0 prodloužení pružiny.

Vychýlíme-li těleso zavěšené na pružině z rovnovážné polohy, bude vykonávat harmonické kmity s frekvencí

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{3}$$

Pro dobu kmitu T platí

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \tag{4}$$

kde m je hmotnost tělesa a k je tuhost pružiny. Pro tuhost pružiny platí také vztah

$$k = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 m, \tag{5}$$

Metody měření

1. • Statická metoda: Měříme protažení pružiny způsobené závažím známé hmotnosti. Měření provádíme katetometrem. Z protažení pak tuhost vypočteme ze vztahu (2).
   • Dynamická metoda: Měříme dobu kmitu tělesa známé hmotnosti na pružině. Čas měříme stopkami. Pro zvýšení přesnosti jsem měřila dobu 10 kmitů. Tuhost určíme ze vztahu (5).

2. Závislost úhlové frekvence ω na $\sqrt{\frac{k}{m}}$ zjišťujeme tak, že pro danou pružinu a danou hmotnost určíme tuhost statickou metodou. Tím získáme pravou stranu. Tu porovnáme s ω, kterou vypočteme na základě vztahu:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \tag{6}$$

   kde T je doba kmitu. Předpokládaná závislost je dle vztahu (3) lineární.

3. Při měření místního tíhového zrychlení zavěsíme těleso na pružinu a měříme dobu kmitu T a prodloužení pružiny y v rovnovážném stavu. Tíhové zrychlení následně vypočteme pomocí vztahu

$$g = \omega^2 y, \tag{7}$$

   Úhlovou frekvenci poté vypočteme dle (6). Předpokládaná velikost tíhového zrychlení je dle [1] $g_n = 9,80665$ m.s^{-2} .

4. • Podle (3) předpokládáme, že závislost ω na $\sqrt{\frac{k}{m}}$ bude lineární, body by měly ležet na přímce se směrnicí 1 procházející počátkem.
   • Podle (3) by body měly ležet na přímce se směrnicí $\sqrt{k}$ procházející počátkem.
   • Podle (3) by body měly ležet na přímce se směrnicí $\sqrt{\frac{1}{m}}$ procházející počátkem.

Naměřené hodnoty a zpracování výsledků

1. • Měření tuhosti statickou metodou:
   Naměřené hodnoty protažení pružin jsou v Tabulce 1. Tuhost pružiny spočítám ze vzorce (2). Za g vezmeme tabulkovou hodnotu dle [1]. Podíl $\frac{m}{y_0}$ vypočtu jako směrnici regresní přímky, kterou proložíme naměřenými hodnotami protažení pružin z Tabulky 1. Platí tedy

$$\frac{m}{y_0} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} y_i^2} \tag{8}$$

   Chybu odhadneme vztahem (viz [2], kap. 5.6)

$$\sigma_{k_{stat}} = g\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(m_i - \frac{m}{y_0}y_i)^2} \tag{9}$$

Vypočetla jsem následující hodnoty tuhostí pružin:

Pružina č. 1: $k = (7,06 \pm 0,00)$ N.m^{-1}, relativní chyba 0,06%.

Pružina č. 2: $k = (6,25 \pm 0,03)$ N.m^{-1}, relativní chyba 0,48%.

Pružina č. 3: $k = (7,10 \pm 0,02)$ N.m^{-1}, relativní chyba 0,22%.

Pružina č. 4: $k = (3,84 \pm 0,07)$ N.m^{-1}, relativní chyba 1,83%.

Pružina č. 5: $k = (13,77 \pm 0,04)$ N.m^{-1}, relativní chyba 0,26%.

- Měření tuhosti dynamickou metodou:
  Naměřené časy jsou zaznamenány v Tabulce 2. Pro každé závaží jsem provedla 5 měření, aby nedošlo k hrubé chybě. Tuhost pružiny pro toto závaží spočtu dle vzorce (5). Výslednou tuhost pružiny pak spočítám jako aritmetický průměr tuhostí změřených pro každé závaží. Celková chyba pak bude maximální chybou zjištěnou pro jedno závaží. Chyba měření času pro jedno závaží je

$$\sigma_T = \sqrt{\sigma_{stat}^2 + \sigma_{odh}^2}, \tag{10}$$

kde $\sigma_{stat}^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(T_i - \tilde{T})^2$, kde $\tilde{T}$ je průměr 5 naměřených časů a σ_{odh} je odhadovaná chyba měření. Svou reakční dobu odhaduji na 0,3 s. Pro zvýšení přesnosti jsem měřila 10 kmitů, tudíž odhadovaná chyba měření času je 0,01 s. Chybu měření tuhosti jednoho závaží spočteme podle vzorce pro přenos chyb a vzorce (5) následovně:

$$\sigma_{k_T}^2 = \left(\frac{\partial \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 m}{\partial T}\right)^2 \sigma_T^2 = \left(\frac{8\pi^2}{T^3} m\right)^2 \sigma_T^2 \tag{11}$$

Vypočetla jsem následující hodnoty tuhostí pružin:

Pružina č. 1: $k = (6,77 \pm 0,18)$ N.m^{-1}, relativní chyba 2,60%.

Pružina č. 2: $k = (6,11 \pm 0,21)$ N.m^{-1}, relativní chyba 3,41%.

Pružina č. 3: $k = (6,15 \pm 0,15)$ N.m^{-1}, relativní chyba 2,40%.

Pružina č. 4: $k = (3,84 \pm 0,11)$ N.m^{-1}, relativní chyba 2,86%.

Pružina č. 5: $k = (13,87 \pm 0,26)$ N.m^{-1}, relativní chyba 1,85%.

2. Určení závislosti úhlové frekvence ω na $\sqrt{\frac{k}{m}}$:

   Úhlovou frekvenci spočteme ze vztahu (6), přičemž za T vezmeme již naměřené hodnoty z části 1. Výsledné hodnoty jsou zaznamenány v Tabulce 3. Koeficient korelace mezi oběma veličinami mi vyšel 1,00.

3. Určení místního tíhového zrychlení:

   Tíhové zrychlení spočteme z rovnice (7). Úhlovou frekvenci zjistíme stejně jako v části 2. Hodnoty protažení pružiny y převezmu z části 1. Spočtené hodnoty jsou v

Tabulce 4. Výsledné tíhové zrychlení bude aritmetickým průměrem hodnot v Tabulce 4. Za chybu můžeme vzít maximální chybu ze statistického souboru, kterou zjistíme dle následujícího vztahu:

$$\sigma_g^2 = \left(\frac{\partial\left(\omega^2 y\right)}{\partial\omega}\right)^2 \sigma_\omega^2 + \left(\frac{\partial\left(\omega^2 y\right)}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2 = 4\omega^2 y^2 \sigma_\omega^2 + \omega^4 \sigma_y^2 \tag{12}$$

kde σ_y nazvu chybu měření katetometrem. Tu kvůli otřesům odhadnu na 2 mm. σ_ω^2 zjistím ze vzorce

$$\left(\frac{\partial\left(\frac{2\pi}{T}\right)}{\partial T}\right)^2 \sigma_T^2 = \frac{4\pi^2}{T^4}\sigma_T^2, \tag{13}$$

kde σ_T je chyba měření času.

Výsledná hodnota tíhového zrychlení je $g = (9,43 \pm 0,5)$ m.s^{-2} .

4. Sestrojení grafů závislostí:
   Naměřené hodnoty jsem vynesla do Grafů 1-3. Ve všech případech jsem zjistila lineární závislost. Hodnoty v Grafu 1 leží na přímce se směrnicí 0,94 (zjištěno pomocí lineární regrese).

   Na 2. grafu leží body na přímkách se směrnicemi:

   - Pro $m = 30$ g je směrnice 8,30.
   - Pro $m = 50$ g je směrnice 4,89.
   - Pro $m = 70$ g je směrnice 4,32.
   - Pro $m = 100$ g je směrnice 3,29.

   Na 3. grafu leží body na přímkách se směrnicemi:

   - Pružina č.1 - směrnice je 2,67.
   - Pružina č.2 - směrnice je 2,50.
   - Pružina č.3 - směrnice je 2,66.
   - Pružina č.4 - směrnice je 1,96.
   - Pružina č.5 - směrnice je 3,73.

Diskuse

1. Byla změřena tuhost pěti pružin statickou a dynamickou metodou. Hodnoty, jak ukazují výsledky, se od sebe liší v rámci chyby.

2. Závislost uvedených výrazů je podle měření lineární, jak je vidět z hodnoty koeficientu korelace (1,00). To potvrzuje teoretický předpoklad (viz (3)).

3. Tíhové zrychlení se v rámci chyby shoduje s tabulkovou hodnotou. Je však patrné, že velká většina hodnot vycházela vyšší než skutečné tíhové zrychlení. Tato nepřesnost je pravděpodobně způsobena tím, že jsme zanedbávali například hmotnost pružiny a považovali jsme ji za dokonalou lineární pružinu.

4. Z grafů jsou předpokládané závislosti zřejmé. Směrnice všech přímek se přibližně shodují s předpokládanými hodnotami.

Závěr

Pracovní úkol byl splněn. Naměřené hodnoty se ve všech případech přibližně shodují s předpokládanou hodnotou.

TABULKA 1. Závislost protažení pružiny na hmotnosti závaží.

m [g]	30	50	70	100	110	
y [mm]	42,5	69,1	97,0	139,0	153,5	
m [g]	30	50	70	100		
y [mm]	51,5	82,0	114,5	161,0		
m [g]	30	50	70	100	110	140
y [mm]	40,5	67,5	94,0	140,5	151,5	190,5
m [g]	50	60	70	80	90	
y [mm]	110,5	137,0	164,0	188,5	212,5	
m [g]	100	150	200	250	300	
y [mm]	73,5	108,5	145,5	180,5	215,5	

TABULKA 2. Naměřené hodnoty doby kmitu t_{10}.

Pružina 1:					
m [g]	t_{10} [s]	t_{10} [s]	t_{10} [s]	t_{10} [s]	t_{10} [s]
30	4,0	4,3	4,2	4,2	4,3
50	5,5	5,3	5,4	5,3	5,3
70	6,3	6,4	6,1	6,4	6,2
100	7,5	7,3	7,5	7,2	7,5
110	8,3	7,9	8,0	8,0	8,1
Pružina 2:					
m [g]	t_{10} [s]	t_{10} [s]	t_{10} [s]	t_{10} [s]	t_{10} [s]
30	4,4	4,4	4,3	4,4	4,4
50	5,6	5,4	5,5	5,4	5,5
70	6,5	6,5	6,6	6,5	6,6
100	7,6	7,7	7,6	7,8	7,7
110	8,2	7,9	8,2	7,9	8,0
Pružina 3:					
m [g]	t_{10} [s]	t_{10} [s]	t_{10} [s]	t_{10} [s]	t_{10} [s]
50	5,4	5,5	5,4	5,6	5,5
70	6,2	6,5	6,4	6,2	6,4
100	7,4	7,3	7,4	7,4	7,3
110	7,7	7,6	7,5	7,6	7,5
140	8,6	8,6	8,7	8,6	8,6
Pružina 4:					
m [g]	t_{10} [s]	t_{10} [s]	t_{10} [s]	t_{10} [s]	t_{10} [s]
50	7,1	7,0	7,1	7,0	7,1
60	7,7	7,7	7,9	7,8	7,6
70	8,3	8,1	8,2	8,2	8,1
80	9,0	8,8	8,9	8,9	8,9
90	9,4	9,5	9,4	9,1	9,3
Pružina 5:					
m [g]	t_{10} [s]	t_{10} [s]	t_{10} [s]	t_{10} [s]	t_{10} [s]
100	5,2	5,3	5,4	5,3	5,5
150	6,3	6,4	6,2	6,3	6,5
200	7,4	7,5	7,4	7,4	7,4
250	8,2	8,2	8,2	8,2	8,2
300	9,0	9,0	9,0	9,0	9,0

TABULKA 3. Závislost úhlové frekvence ω na $\sqrt{\frac{k}{m}}$.

Pružina 1:					
m	30	50	70	100	110
ω	15,34	11,88	10,04	8,40	8,01
$\sqrt{\frac{k}{m}}$	15,02	11,64	9,83	8,23	7,84
Pružina 2:					
m	30	50	70	100	
ω	14,43	11,18	9,45	7,91	
$\sqrt{\frac{k}{m}}$	14,27	11,05	9,34	7,82	
Pružina 3:					
m	50	70	100	110	140
ω	11,92	10,07	8,43	8,03	7,12
$\sqrt{\frac{k}{m}}$	11,09	9,37	7,84	7,48	6,63
Pružina 4:					
m	50	60	70	80	90
ω	8,76	8,00	7,41	6,93	6,53
$\sqrt{\frac{k}{m}}$	8,76	8,00	7,41	6,93	6,53
Pružina 5:					
m	100	150	200	250	300
ω	11,74	9,58	8,30	7,42	6,78
$\sqrt{\frac{k}{m}}$	11,78	9,61	8,33	7,45	6,80

TABULKA 4. Naměřené tíhové zrychlení.

Pružina 1:					
m [g]	30	50	70	100	110
ω [s^{-1}]	15,34	11,88	10,04	8,40	8,01
y [mm]	42,5	69,1	97,0	139,0	153,5
g [$m.s^{-2}$]	10,00	9,75	9,78	9,81	9,85
Pružina 2:					
m [g]	30	50	70	100	
ω [s^{-1}]	14,43	11,18	9,45	7,91	
y [mm]	51,5	82,0	114,5	161,0	
g [$m.s^{-2}$]	10,73	10,25	10,22	10,06	
Pružina 3:					
m [g]	50	70	100	110	140
ω [s^{-1}]	11,92	10,07	8,43	8,03	7,12
y [mm]	40,5	67,5	94,0	140,5	151,5
g [$m.s^{-2}$]	5,75	6,84	6,67	9,07	7,68
Pružina 4:					
m [g]	50	60	70	80	90
ω [s^{-1}]	8,76	8,00	7,41	6,93	6,53
y [mm]	110,5	137,0	164,0	188,5	212,5
g [$m.s^{-2}$]	8,48	8,76	8,99	9,04	9,06
Pružina 5:					
m [g]	100	150	200	250	300
ω [s^{-1}]	11,74	9,58	8,30	7,42	6,78
y [mm]	73,5	108,5	145,5	180,5	215,5
g [$m.s^{-2}$]	10,12	9,96	10,02	9,95	9,89

Použitá literatura

[1] J. Mikulčák, B. Klimeš, J. Široký, V. Šůla, F. Zemánek: Matematické, fyzikální a chemické tabulky pro střední školy. Prometheus, Praha 1997.

[2] B. Sprušil, P. Zieleniecová: Úvod do teorie fyzikálních měření. SPN, Praha 1997.