

Matematická analýza I

ZS 2002 / 2003

Jaroslava Schovancová

3. února 2003

Obsah

1	Úvod do matematické analýzy.	3
2	Reálné funkce jedné reálné proměnné.	7
2.1	Limity a spojitost	7
2.2	Supremum	16
2.3	Posloupnosti reálných čísel	20
2.4	Hrubší vlastnosti spojitých funkcí na intervalu.	27
2.5	Zavedení elementárních funkcí.	31
2.6	Derivace reálných funkcí.	47
2.7	Rolleova věta a její důsledky.	53
2.8	Konvexita a konkávita.	57
2.9	Průběh funkce.	61
2.10	Taylorův polynom.	65
3	Integrace reálných funkcí.	74
3.1	Primitivní funkce.	74
3.2	Riemannův integrál.	86

Značení.

V textu je použito následující barevné rozlišení:

- Touto barvou budu psát všechny axiomy.
- Touto barvou budu psát všechny definice.
- Touto barvou budu psát všechny věty.
- Touto barvou budu psát všechny důkazy.
- Touto barvou budu psát všechny poznámky
- Touto barvou budu psát všechny příklady
- Touto barvou budu psát všechny úmluvy.
- Touto barvou budu psát běžný text.

Kapitola 1

Úvod do matematické analýzy.

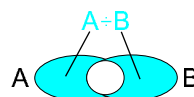
Newton, Leibnitz - založili matematickou analýzu

limita funkce: 1821 Cauchy (Weierstrass)

analýza předpokládá:

ČÍSLA **přirozená** \mathbb{N}
 celá $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup -\mathbb{N} \cup \{0\}$
 racionální \mathbb{Q}
 iracionální
 reálná \mathbb{R}
 komplexní \mathbb{C}

MNOŽINY TEORIE MNOŽIN
operace $\in, \subset, \cap, \cup, \setminus, \dot{\cup}$
 $\dot{\cup} \dots$ symetrická diference



$$A \dot{\cup} B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

VÝROKOVÁ LOGIKA **výrok** je tvrzení, které je buď pravdivé, nebo nepravdivé
výroková forma (funkce) $V(x) \cdot x \leq 3$
 $V(4)$ ne
 $V(-1)$ ano

		A	B	$A \& B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$	$\neg A$
<i>konjunkce</i>	\wedge	1	1	1	1	1	1	0
<i>disjunkce</i>	\vee	1	0	0	1	0	0	0
<i>implikace</i>	\Rightarrow	0	1	0	1	1	0	1
<i>ekvivalence</i>	\Leftrightarrow	0	0	0	0	1	1	1
<i>negace</i>	\neg							

$$A \Rightarrow B \Leftrightarrow [\neg A \vee B]$$

kvantifikátory všeobecný \forall
 existenční \exists

$$\neg(\forall x \in M V(x)) \Leftrightarrow [\exists x \in M \neg V(x)]$$

$$\neg(\exists x \in M V(x)) \Leftrightarrow [\forall x \in M \neg V(x)]$$

Pozor na pořadí kvantifikátorů!

$$(1) \forall x \in M \quad \exists y \in \quad (2) \Rightarrow (1)$$

$$(2) \exists y \in \quad \forall x \in M \quad (2) \not\Leftarrow (1)$$

METODY DŮKAZŮ **přímo:**

$$A \Rightarrow B$$

$$A \Rightarrow C_1 \Rightarrow C_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow C_k \Rightarrow B$$

nepřímo:

$$\neg B \Rightarrow A$$

sporem:

$$\neg[A \& B]$$

matematickou indukcí:

$$\forall n \in \mathbb{N} V(n)$$

$$V(1)$$

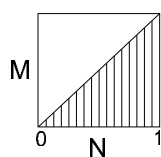
$$V(n) \Rightarrow V(n+1)$$

Dány dvě množiny M, N :

$$M \times N = \{[m, n]; x \in M \& y \in N\} \dots \text{kartézský součin}$$

binární relace je jakákoli podmnožina kartézského součinu

PŘÍKLAD 1: $M, N = [0; 1] \quad m \leq n$



DEFINICE 1: Dány množiny M, N . Pak P je zobrazení (funkce) množiny M do množiny N , jestliže platí

$$(i) \forall x \in M \exists y \in N : [x, y] \in P;$$

$$(ii) \forall x \in M \forall y_1, y_2 \in N : [x, y_1] \in P \& [x, y_2] \in P \Rightarrow y_1 = y_2;$$

$$(iii) \forall [x, y] \in P \Rightarrow x \in M \& y \in N.$$

ÚMLUVA 1: $P : M \rightarrow N$

$$P : m \in M \mapsto n \in N$$

$$n = P(m)$$

$$n = P(m)$$

Místo $[x, y] \in P$ píšeme $n = P(m)$

DEFINICE 2: M nazýváme definičním oborem zobrazení P .

DEFINICE 3: $A \subset M$, pak množinu $P(A) = \{n \in N, \exists m \in A : P(m) = n\}$ nazýváme obrazem množiny A (v zobrazení P).

DEFINICE 4: $B \subset N$, pak množinu $P^{-1}(B) = \{m \in M, P(m) \in B\}$ nazýváme vzorem množiny B (v zobrazení P).

DEFINICE 5: Množina $P(M) \subset N$, nazýváme oborem hodnot zobrazení P .

PŘÍKLAD 2: (Příklady zobrazení.)

(i) **PROSTÉ ZOBRAZENÍ (INJEKTIVNÍ):** jestliže $\forall n \in P(M) \exists! m \in M : P(m) = n$:

Př.: $\sin x : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ není prostá, ale:

$$\sin x : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1] \text{ je prostá}$$

(ZÁLEŽÍ NA D_f)

(ii) **KONSTANTNÍ ZOBRAZENÍ:** $P : m \mapsto n \exists n_0 \in N \forall m \in M P(m) = n_0$

(NEBÝVÁ PROSTÉ)

(iii) **ZOBRAZENÍ „NA“ (SURJEKTIVNÍ):** $\forall n \in N \exists m \in M : P(m) = n$

Př.: $\cos x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ není „na“, ale:

$$\cos x : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1] \text{ je „na“}$$

(ZÁLEŽÍ NA H_f)

(iv) **BIJEKCE - ZOBRAZENÍ PROSTÉ & „NA“:**

- důkaz, že dvě množiny jsou stejně velké

$$\text{Př.: } \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q} \exists \text{ bijekce}$$

$$\sin x : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$$

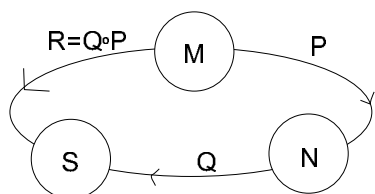
(v) IDENTITA: $M = N$, pak $\text{id } m \mapsto m$ je identita.

OPERACE SE ZOBRAZENÍMI

(i) RESTRIKCE (ZÚŽENÍ): Dáno $P : M \mapsto N, A \subset M$, pak $P|_A : A \rightarrow N$

(ii) SKLÁDÁNÍ ZOBRAZENÍ: $P : M \mapsto N, Q : N \mapsto S$

definujeme nové zobrazení: $R : M \rightarrow S$ předpisem $R(m) = Q(P(m))$



ÚMLUVA 2: Značíme $R = Q \circ P$

POZNÁMKA 1: SKLÁDÁNÍ ZOBRAZENÍ JE ASOCIATIVNÍ, NENÍ KOMUTATIVNÍ:

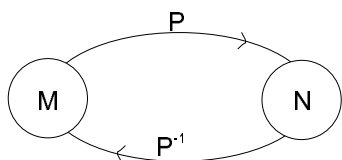
$$(P \circ Q) \circ R = P \circ (Q \circ R)$$

$$P \circ \text{id} = \text{id} \circ P = P$$

(iii) INVERZNÍ ZOBRAZENÍ P^{-1} :

$$P^{-1}(n) = m \Leftrightarrow P(m) = n$$

P musí být **prosté!**



POZNÁMKA 2: $P \circ^{-1} P = P \circ P^{-1} = \text{ID}$

Kapitola 2

Reálné funkce jedné reálné proměnné.

2.1 Limity a spojitost

ÚMLUVA 3: f bude značit reálnou funkci (reálné proměnné):

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ nebo}$$

$$f : A \rightarrow \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}$$

PŘÍKLAD 3: (i) IDENTICKÁ FUNKCE: $f(x) = x \forall x \in \mathbb{R}$

(ii) KONSTANTNÍ FUNKCE: $\exists c \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = c$

(iii) NEZÁPORNÁ FUNKCE: $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 0$

(iv) LICHÁ FUNKCE: $\forall x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f \ \& \ f(-x) = -f(x)$

(v) SUDÁ FUNKCE: $\forall x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f \ \& \ f(-x) = f(x)$

$f = c \dots$ sudá, jestliže $c = 0$, potom je $f(x)$ zároveň lichá

$f(x) = x, x^3, \sin x, \tan x \dots$ liché

$f(x) = x^2, x^4, \cos x \dots$ sudé

$f(x) = x + 1, e^x, \dots$ ani liché, ani sudé

DEFINICE 6: FUNKCE f je PERIODICKÁ , jestliže $p \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f \Rightarrow x + p \in D_f$ & $f(x) = f(x + p)$.

DEFINICE 7: FUNKCE f je NEKLESAJÍCÍ , jestliže $\forall x, y \in D_f : x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.

DEFINICE 8: FUNKCE f je NEROSTOUCÍ , jestliže $\forall x, y \in D_f : x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.

POZNÁMKA 3: Je - li funkce f neklesající nebo neroustoucí, je **monotónní**.

DEFINICE 9: FUNKCE f je KLESAJÍCÍ , jestliže $\forall x, y \in D_f : x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.

DEFINICE 10: FUNKCE f je ROSTOUCÍ , jestliže $\forall x, y \in D_f : x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.

POZNÁMKA 4: Je - li funkce f klesající nebo roustoucí, je **ryze monotónní**.

DEFINICE 11: Řekneme, že FUNKCE f je na množině A OMEZENÁ , jestliže $\exists K > 0 \forall x, y \in A : |f(x)| \leq K$.

DEFINICE 12: Řekneme, že FUNKCE f je na množině A OMEZENÁ SHORA , jestliže $\exists K > 0 \forall x, y \in A : f(x) \leq K$.

DEFINICE 13: Řekneme, že FUNKCE f je na množině A OMEZENÁ ZDOLA , jestliže $\exists K > 0 \forall x, y \in A : f(x) \geq K$.

Př.: $\sin x$ je omezená na \mathbb{R}

Př.: $\frac{1}{x}$ není omezená na $(0, 1)$, ale je omezená na $(\delta, 1)$ pro každé $\delta > 0$

PŘÍKLAD 4: PŘÍKLADY FUNKCÍ:

$$(i) \text{ DIRICHLETOVA FUNKCE: } D(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$(ii) \text{ RIEMANNOVA FUNKCE: } R(x) = \begin{cases} 0, & x \neq \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z} \\ \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

POZNÁMKA 5: Obě jsou periodické, nejsou monotónní.

(iii) POLYNOMY, RACIONÁLNÍ FUNKCE (podíl dvou polynomů), TRIGONOMETRICKÉ FUNKCE ($\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cotg x$).

(iv) CYKLOMETRICKÉ, ($\sin^{-1} x = \arcsin x$, $\cos^{-1} x = \arccos x$, $\operatorname{tg}^{-1} x = \operatorname{arctg} x$, $\operatorname{cotg}^{-1} x = \operatorname{arccotg} x$).

(v) EXPONENCIÁLNÍ, ($\exp x$, $\ln x$).

DEFINICE 14: INTERVAL v \mathbb{R} , $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$ $-\infty \leq a < b \leq \infty$

DEFINICE 15: INTERVAL v \mathbb{R} , $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$ $-\infty < a < b < \infty$

ÚMLUVA 4: ROZŠÍŘENÁ REÁLNÁ OSA $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$

$$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

$$\text{„}\mathbb{R} = [-\infty, +\infty]\text{“}$$

USPOŘÁDÁNÍ: $-\infty < a < +\infty \quad \forall a \in \mathbb{R}$

ABSOLUTNÍ HODNOTA: $|\pm \infty| = +\infty$

SČÍTÁNÍ: $\forall A \in \mathbb{R}^* \setminus \{-\infty\} : a + \infty = \infty$; $\forall A \in \mathbb{R}^* \setminus \{-\infty\} : a + (-\infty) = -\infty$

výraz $(+\infty - \infty)$ není definován

NÁSOBENÍ: $\forall A \in \mathbb{R}^* a > 0 : a \cdot (\pm \infty) = \pm \infty$; $\forall A \in \mathbb{R}^* a < 0 : a \cdot (\pm \infty) = \mp \infty$;

výraz $0 \cdot (\pm \infty)$ není definován

DĚLENÍ: $\forall a \in \mathbb{R}^* : \frac{a \pm 0}{\pm \infty}$, pojmy $\frac{\pm \infty}{\pm \infty}$, obdoba $\frac{a}{0}$ nejsou definovány

DEFINICE 16: OKOLÍ BODU: Nechť $A \in \mathbb{R}$ $\epsilon > 0$, potom ϵ -okolím bodu A rozumíme množinu $\mathcal{U}_{(a)}^\epsilon = (a - \epsilon; a + \epsilon)$.

DEFINICE 17: LEVÉ OKOLÍ BODU: Nechť $A \in \mathbb{R}$ $\epsilon > 0$, potom levým ϵ -okolím bodu A rozumíme množinu $\mathcal{U}_{(a)}^\epsilon = (a - \epsilon; a]$.

DEFINICE 18: PRAVÉ OKOLÍ BODU: Nechť $A \in \mathbb{R}$ $\epsilon > 0$, potom pravým ϵ -okolím bodu A rozumíme množinu $\mathcal{U}_{(a)}^\epsilon = [a; a + \epsilon)$.

ÚMLUVA 5: Nechť $a = +\infty$, potom $\mathcal{U}_{(a)}^\epsilon = (\frac{1}{\epsilon}; +\infty)$.

ÚMLUVA 6: Nechť $a = -\infty$, potom $\mathcal{U}_{(a)}^\epsilon = (-\infty; -\frac{1}{\epsilon})$.

DEFINICE 19: PRSTENCOVÝM (REDUKOVANÝM) OKOLÍ BODU $a \in \mathbb{R}^*$ rozumíme množinu $\mathcal{P}_{(a)}^\epsilon = \mathcal{U}_{(a)}^\epsilon \setminus \{a\}$.

POZNÁMKA 6: Pro $a = +\infty$ přichází v úvahu jen levé redukované okolí. Pro $a = -\infty$ přichází v úvahu jen pravé redukované okolí.

DEFINICE 20: LIMITA FUNKCE. Nechť $a \in \mathbb{R}$, necht' f je reálná funkce, která je definována alespoň na nějakém redukovaném okolí bodu a . Potom řekneme, že f má v bodě a limitu $A \in \mathbb{R}^*$, jestliže je splněn axiom $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ tak, že $\forall x \in P_{(a)}^\delta \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}_{(A)}^\epsilon$.

POZNÁMKA 7: Limita popisuje vlastnost f v blízkém okolí bodu, ale ne v bodě samotném.

POZNÁMKA 8: f nemá v bodě $a \in \mathbb{R}$ limitu rovnou $A \in \mathbb{R}^*$, ale

- (i) buď má v bodě $a \in \mathbb{R}$ jinou limitu,
- (ii) nebo limita této funkce v bodě a neexistuje.

POZNÁMKA 9: Limita funkce f v bodě a neexistuje, jestliže $\forall A \in \mathbb{R}^* \exists c > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in \mathcal{P}_{(a)}^\delta : f(x) \notin \mathcal{U}_{(A)}^c$

ÚMLUVA 7: ZNAČÍME: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Leftrightarrow f$ má v bodě a limitu A

DEFINICE 21: LIMITA ZPRAVA: $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathcal{P}_{+(a)}^\delta \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}_{(A)}^\epsilon$

DEFINICE 22: LIMITA ZLEVA: $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathcal{P}_{-(a)}^\delta \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}_{(A)}^\epsilon$

PŘÍKLAD 5: (i) f JE KONSTANTNÍ: $f(x) = c; c \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$ ($\forall c$ volím $\delta = +d$);

(ii) $f(x) = x^3: \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 8$;

(iii) $D(x)$... DIRICHLETOVA FUNKCE: lim neexistuje v žádném bodě, ani jednostranná \Rightarrow nenajdeme δ - okolí: $\exists \epsilon \forall \delta \exists x f(x) \notin \mathcal{U}_{(a)}^\epsilon$ ($\epsilon < 1$)

(iv) $R(x)$... RIEMANNOVA FUNKCE: v každém bodě má limitu 0: $\lim_{x \rightarrow 0} R(x) = 0 \forall a \in \mathbb{R}$

(v) $f(x) = x \cdot D(x)$: $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot D(x) = 0$

POZNÁMKA 10: (i) Funkce nemusí být v bodě A definována, a přesto v něm může mít limitu;

(ii) Je-li $a = \pm\infty$, pak $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ je automaticky jednostranná (zprava nebo zleva)

(iii) Funkce nemusí v bodě mít limitu. Potom

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \begin{cases} \text{existuje} & \begin{cases} \text{vlastní, } A \in \mathbb{R} \\ \text{nevlastní} & \begin{cases} A = +\infty \\ A = -\infty \end{cases} \end{cases} \\ \text{neexistuje} \end{cases}$$

$$\text{např.: } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{x^2} = -\infty$$

(iv) Limita je LOKÁLNÍ pojem. Jestliže $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ a navíc $\exists \delta > 0 : f(x) = g(x)$ pro $x \in \mathcal{P}_{(a)}^\delta$, pak $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$.

VĚTA 1: O JEDNOZNAČNOSTI LIMITY. Každá funkce má v každém bodě nejvýše jednu limitu.

DŮKAZ 1: SPOREM: Nechť $\exists A, B \in \mathbb{R}^*$, $A \neq B$ takové, že $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A = B$.

$$\text{Pak } \forall \epsilon > 0 \exists \delta_A \forall x \in \mathcal{P}_{(a)}^{\delta_A} \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}_{(A)}^\epsilon$$

$$\text{a také } \forall \epsilon > 0 \exists \delta_B \forall x \in \mathcal{P}_{(a)}^{\delta_B} \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}_{(B)}^\epsilon$$

$$A = B \Rightarrow \exists \epsilon \text{ tak malé, že (se okolí nebudou protínat) } \mathcal{U}_{(A)}^\epsilon \cap \mathcal{U}_{(B)}^\epsilon = \emptyset$$

$$\text{Potom pro } x \in \mathcal{P}_{(a)}^{\delta_A} \cap \mathcal{P}_{(a)}^{\delta_B} (\neq \emptyset) : f(x) \in \mathcal{U}_{(A)}^\epsilon \cap \mathcal{U}_{(B)}^\epsilon = \emptyset \quad \text{SPOR.}$$

□

VĚTA 2: O LIMITĚ A OMEZENOSTI. Má-li funkce v bodě $a \in \mathbb{R}^*$ VLASTNÍ limitu (konečnou), pak $\exists \delta > 0$ takové, že f je omezená na $\mathcal{P}_{(a)}^\delta$.

DŮKAZ 2: Víme: $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathcal{P}_{(a)}^\delta \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}_{(A)}^\epsilon$, kde $A \in \mathbb{R}$.

Zvolím $\epsilon = 12$. Pak $\exists \delta > 0 \forall x \in \mathcal{P}_{(a)}^\delta \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}_{(A)}^{12}$, tj. $|f(x) - A| < 12, \forall x \in \mathcal{P}_{(a)}^\delta$.

Z trojúhelníkové nerovnosti: $\Rightarrow |f(x)| = |f(x) - A + A| \leq |f(x) - A| + |A| < 12 + |A| \Rightarrow$ funkce f je omezená na $\mathcal{P}_{(a)}^\delta$.

□

POZNÁMKA 11: Je-li $A \in \mathbb{R}$, pak $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathcal{P}_{(a)}^\delta \Rightarrow |f(x) - A| < \epsilon$ (★)

POZNÁMKA 12: POZNÁMKA O EPSILONECH.

(★) $\Leftrightarrow \exists K > 0 \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathcal{P}_{(a)}^\delta \Rightarrow |f(x) - A| < K \cdot \epsilon$

DŮKAZ: jen pro $K > 1$ „ \Rightarrow “ zřejmé (neboť $\epsilon < K\epsilon$).

„ \Leftarrow “ najdu pro $\forall \epsilon > 0$, tak najdu i pro $\forall K\epsilon > 0$.

$\epsilon \mapsto \epsilon' = \frac{\epsilon}{K} \mapsto \delta \dots |f(x) - A| < K \cdot \epsilon' = K \cdot \frac{\epsilon}{K} = \epsilon$

□

VĚTA 3: O ARITMETICE LIMIT. Necht' $a \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B \in \mathbb{R}^*$. Potom

- (i) $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |A|$;
- (ii) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = (A \pm B)$, je-li RHS definována;
- (iii) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = (A \cdot B)$, je-li RHS definována;
- (iv) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$, je-li RHS definována.

DŮKAZ 3: (Jen pro případ $A, B \in \mathbb{R}$, ostatní případy DCV.)

TO JEST: Ke zvolenému $\epsilon > 0 \exists \delta_f > 0, \delta_g > 0 : \forall x \in \mathcal{P}_{(a)}^{\delta_f} \Rightarrow |f(x) - A| < \epsilon, \forall x \in \mathcal{P}_{(a)}^{\delta_g} \Rightarrow |g(x) - B| < \epsilon$.

(i) Víme: $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathcal{P}_{(a)}^\delta \Rightarrow |f(x) - A| < \epsilon$

CHCEME: $\forall \epsilon > 0 \exists \Delta > 0 \forall x \in \mathcal{P}_{(a)}^\Delta \Rightarrow ||f(x)| - |A|| < \epsilon$

UMÍME: trojúhelníková nerovnost:

$$||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha - \beta| \Rightarrow ||f(x)| - |A|| \leq |f(x) - A| < \epsilon$$

\Rightarrow stačí vzít $\Delta = \delta$, pak $\forall x \in \mathcal{P}_{(a)}^\Delta = \mathcal{P}_{(a)}^\delta \Rightarrow |f(x) - A| < \epsilon \Rightarrow ||f(x)| - |A|| \leq |f(x) - A| < \epsilon$

(ii) ZVOL: $\epsilon > 0$ pro $x \in \mathcal{P}_{(a)}^\delta$, kde $\delta = \min(\delta_f, \delta_g)$

$$|f(x) \pm g(x) - (A \pm B)| = |(f(x) - A) \mp (g(x) - B)| \leq |f(x) - A| + |g(x) - B| < \epsilon + \epsilon < 2\epsilon$$

(iii) $B \in \mathbb{R} \Rightarrow$ (V2) g je omezená na nějakém γ -okolí bodu a :

$$\exists K > 0 \exists \gamma > 0 \forall x \in \mathcal{P}_{(a)}^\gamma \Rightarrow |g(x)| \leq K$$

ZVOL: $\epsilon > 0$ polož $\delta = \min(\gamma, \delta_f, \delta_g)$, potom pro $x \in \mathcal{P}_{(a)}^\delta$

$$|f(x) \cdot g(x) - A \cdot B| = |f(x) \cdot g(x) - g(x) \cdot A + g(x) \cdot A - A \cdot B| = |(f(x) - A) \cdot g(x) + A \cdot (g(x) - B)| \leq |f(x) - A| \cdot |g(x)| + |A| \cdot |g(x) - B| \leq \epsilon \cdot K + |A| \cdot \epsilon = \epsilon \cdot (K + |A|)$$

(iv) $\frac{A}{B}$ je definovaný pojem $\Rightarrow B \neq 0$. Potom $\exists \gamma > 0 \forall x \in \mathcal{P}_{(a)}^\gamma : \frac{|B|}{2} < |g(x)| \leq 2|B|$

ZVOL: $\epsilon > 0$ polož $\delta = \min(\gamma, \delta_f, \delta_g)$, potom pro $x \in \mathcal{P}_{(a)}^\delta$ platí

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B} \right| = \frac{|f(x) \cdot B - A \cdot B + A \cdot B - A \cdot g(x)|}{|g(x)| \cdot |B|} \leq \frac{|f(x) - A| \cdot |B| + |A| \cdot |g(x) - B|}{\frac{|B|}{2} \cdot |B|} \leq \epsilon \cdot \frac{2(|B| + |A|)}{|B|^2}$$

□

VĚTA 4: O VZTAHU LIMITY A JEDNOSTRANNÝCH LIMIT. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = A$, kde $A \in \mathbb{R}^*$, $a \in \mathbb{R}$

DŮKAZ 4: „ \Rightarrow “ zřejmé.

„ \Leftarrow “: ZVOL: $\epsilon > 0$, pak $\exists \delta_+ \forall x \in \mathcal{P}_{+(a)}^{\delta_+} = (a; a + \delta) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}_{(A)}^\epsilon$

& $\exists \delta_- \forall x \in \mathcal{P}_{-(a)}^{\delta_-} = (a - \delta, a) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}_{(A)}^\epsilon$

Tedy stačí zvolit $\delta = \min(\delta_-, \delta_+)$, pak $\forall x \in (a - \delta; a + \delta) \setminus \{a\} \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}_{(A)}^\epsilon$

□

VĚTA 5: O LIMITĚ A USPOŘÁDÁNÍ. Necht' $A \in \mathbb{R}^*$

(i) Jestliže $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ a $\exists \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ a $\lim_{x \rightarrow a} f(x) < \lim_{x \rightarrow a} g(x)$, potom $\exists \delta > 0 : \forall x \in \mathcal{P}_{(a)}^\delta \Rightarrow f(x) < g(x)$.

(ii) Necht' $\exists \delta > 0 : \forall x \in \mathcal{P}_{(a)}^\delta \Rightarrow f(x) \leq g(x)$ a necht' $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ a $\exists \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$. Potom $A \leq B$.

(iii) VĚTA O DVOU POLICAJTECH. Necht' $\exists \delta > 0 : \forall x \in \mathcal{P}_{(a)}^\delta : f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ & $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$. Potom $\exists \lim_{x \rightarrow a} h(x) = A$.

DŮKAZ 5: (i) VÍME: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$, $A < B$.

Zvolím: $\epsilon > 0$ takové, aby $\mathcal{U}_{(A)}^\epsilon \cap \mathcal{U}_{(B)}^\epsilon = \emptyset$.

Potom $\exists \delta > 0$ tak, že $f(\mathcal{P}_{(a)}^\delta) \subset \mathcal{U}_{(A)}^\epsilon$, $g(\mathcal{P}_{(b)}^\delta) \subset \mathcal{U}_{(B)}^\epsilon$, odkud již tvrzení plyne.

(ii) Plyne ihned z (i), je to totéž - (obrácená implikace mezi negacemi).

(iii) Zvolím: $\epsilon > 0$ takové, pak $\exists \delta$ tak, že $f(\mathcal{P}_{(a)}^\delta) \subset \mathcal{U}_{(A)}^\epsilon$ & $g(\mathcal{P}_{(b)}^\delta) \subset \mathcal{U}_{(B)}^\epsilon \Rightarrow h(\mathcal{P}_{(a)}^\delta) \subset \mathcal{U}_{(A)}^\epsilon$

□

PŘÍKLAD 6: $\sin x, \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

na $(0, \frac{\pi}{2}) : \sin x < x < \tan x$ & $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x = ?$

$\sin x < x < \tan x : \sin x$

$\Rightarrow 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\cos x}_{=1} < \frac{\sin x}{x} < 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$

Analogicky $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

DEFINICE 23: Řekneme, že funkce f je SPOJITÁ v bodě $a \in \mathbb{R}$, jestliže $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

DEFINICE 24: Řekneme, že funkce f je **SPOJITÁ ZLEVA** v bodě $a \in \mathbb{R}$, jestliže $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$.

DEFINICE 25: Řekneme, že funkce f je **SPOJITÁ ZPRAVA** v bodě $a \in \mathbb{R}$, jestliže $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$.

POZNÁMKA 13: (i) Funkce je spojitá \Leftrightarrow spojitá zleva & spojitá zprava v a .

(ii) Má-li být f spojitá v a , musí být především **DEFINOVÁNA** v a .

(iii) Spojitost v $\pm\infty$ nedává smysl.

(iv) Funkce f je spojitá v $a \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathcal{P}_{(a)}^\delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$

POZNÁMKA 14: Rádi bychom věděli, jestli je spojitě složení funkcí $f \circ g$:

$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$ & $\lim_{y \rightarrow A} f(y) = B \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (f \circ g)(x) = B$. **OBEZNĚ NEPLATÍ**

PŘÍKLAD 7: $g \equiv 0, f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0, \lim_{y \rightarrow 0} f(y) = 0, (f \circ g) \equiv 1 \neq \lim_{x \rightarrow 0} (f \circ g) = 1 \Rightarrow$ **vnitřní funkce nemůže být nespojitá.**

VĚTA 6: O LIMITĚ SLOŽENÉ FUNKCE. (!!!) Nechť $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A, \lim_{y \rightarrow A} f(y) = B$, kde $a, A, B \in \mathbb{R}^*$.

Nechť platí alespoň jeden z následujících dvou předpokladů:

(P1) $A \in \mathbb{R}$ & f je spojitá v A ,

(P2) $\exists \eta > 0 \forall x \in \mathcal{P}_{(a)}^\eta \Rightarrow g(x) \neq A$

POZNÁMKA 15: Pro $A = \pm\infty$ je to splněno automaticky.

Potom $\lim_{x \rightarrow a} (f \circ g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = B$.

DŮKAZ 6: Nechť platí (P1).

VÍME: $\forall \epsilon > 0 \exists \psi > 0 f(\mathcal{U}_{(A)}^\psi) \subseteq \mathcal{U}_{(B)}^\epsilon$ (ze spojitosti f v A).

& k tomuto $\psi \exists \delta > 0 \quad g \left(\mathcal{P}_{(a)}^\delta \right) \subseteq \mathcal{U}_{(A)}^\psi$ (neboť $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$).

TEDY CELKEM: $(f \circ g) \left(\mathcal{P}_{(a)}^\delta \right) = f \left[g \left(\mathcal{P}_{(a)}^\delta \right) \right] \subseteq f \left(\mathcal{U}_{(A)}^\psi \right) \subseteq \mathcal{U}_{(B)}^\epsilon$

DOKÁZALI JSME: $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : (f \circ g) \left(\mathcal{P}_{(a)}^\delta \right) \subseteq \mathcal{U}_{(B)}^\epsilon$, tj. $\lim_{x \rightarrow a} (f \circ g)(x) = B$ (ψ byl pomocný parametr).

Nechť platí (P2), pak:

$\forall \epsilon > 0 \exists \psi > 0 \quad f \left(\mathcal{P}_{(A)}^\psi \right) \subseteq \mathcal{U}_{(B)}^\epsilon$

& k tomuto $\psi \exists \Delta > 0 \quad g \left(\mathcal{P}_{(a)}^\Delta \right) \subseteq \mathcal{U}_{(A)}^\psi$

VEZMU: $\delta = \min(\Delta, \eta)$, pak

$g \left(\mathcal{P}_{(a)}^\delta \right) \subseteq \mathcal{P}_{(A)}^\psi$ (neboť $g(x) \neq A \quad \forall x \in \mathcal{P}_{(a)}^\delta$)

Tedy: $(f \circ g) \left(\mathcal{P}_{(a)}^\delta \right) = f \left[g \left(\mathcal{P}_{(a)}^\delta \right) \right] \subseteq \mathcal{U}_{(B)}^\epsilon$

$\lim_{x \rightarrow a} (f \circ g)(x) = B$.

□

2.2 Supremum

REÁLNÁ ČÍSLA - uspořádané komutativní těleso, na kterém platí axiom po supremu

Na \mathbb{R} je dáno:

- relace „ \leq “
- operace „+“, „ \cdot “
- $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ je těleso
- $(\mathbb{R}, +)$ je Abelova grupa „0“
- (\mathbb{R}, \cdot) je Abelova grupa „1“
- antisymetrie $x \leq y \ \& \ y \leq x \Rightarrow x = y$
- dichotomie $x \leq y \vee y \leq x$
- tranzitivita $x \leq y \ \& \ y \leq z \Rightarrow x \leq z$

AXIOM 1: AXIOM O SUPREMU Jestliže množina $A \subseteq \mathbb{R}$ je shora omezená (tj. $\exists K > 0 \forall x \in A : x \leq K$) a neprázdná, potom existuje G takové, že

(i) $\forall x \in A : x \leq G$ (G je HORNÍ ZÁVORA množiny A).

(ii) $\forall G' < G \exists x > G' : x \in A$ (G je NEJMENŠÍ HORNÍ ZÁVORA).

(ii) Potom G nazýváme SUPREMUM MNOŽINY A , značíme

$$G = \sup A.$$

POZNÁMKA 16: (i) Supremum je určeno jednoznačně.

(ii) Analogicky se definuje INFIMUM: $\inf A$ jako největší dolní závora.

(iii) $\sup A$ nemusí být prvkem A !!!

PŘÍKLAD 8: $A = (0; 1)$, $\sup A = 1$, $\inf A = 0$; $\{0; 1\} \notin A$

PŘÍKLAD 9: (i) $A = \{\frac{-1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$

$$\sup A = 0, \max A \nexists$$

$$\inf A = -1 = \min A$$

(ii) $\mathbb{Q} \cap (-\infty; \sqrt{3}] = B$

$$\sup B = \sqrt{3}, \max B \nexists$$

B není zdola omezená

VĚTA 7: ARCHIMÉDOVA VLASTNOST. $\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : n > x$

DŮKAZ 7: SPOREM. $\exists x \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : n \leq x$.

Potom: \mathbb{N} je shora omezená (a neprázdná) $\Rightarrow \exists G = \sup \mathbb{N}$

Tedy: $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \leq G$

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow (n+1) \in \mathbb{N} \Rightarrow (n+1) \leq G \forall n \in \mathbb{N}$$

Tedy: $\forall n \in \mathbb{N} : n \leq G - 1 \Rightarrow$ SPOR.

□

VĚTA 8: (HUSTOTA $\mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) Necht' $-\infty < a < b < +\infty$, pak $\exists q, r \in (a; b)$ takové, že $q \in \mathbb{Q}, r \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

DŮKAZ 8: PŘES V7. $\exists n > \frac{1}{b-a}$, tedy $b-a > \frac{1}{n}$, tedy $\exists m \in \mathbb{Z}$ tak, že $a < \frac{m}{n} < b$.

Z právě dokázaného plyne, že $\exists q_1, q_2 \in \mathbb{Q} \cap (a; b), q_1 < q_2$.

Polož $r = q_1 + \frac{q_2 - q_1}{\sqrt{2}}$. Pak $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \ \& \ r \in (a; b)$.

□

VĚTA 9: (O EXISTENCI n -TÉ ODMOCNINY.) Necht' $n \in \mathbb{N}$ a $x \in [0; +\infty)$. Pak existuje právě jedno reálné číslo $y \in [0; +\infty)$ takové, že $y^n = x$.

DŮKAZ 9: Definujeme $M_1 = \{y \in [0; +\infty) : y^n \leq x\}$

$$M_2 = \{y \in [0; +\infty) : y^n \geq x\}$$

M_1 ... shora omezená (číslo 1 \vee číslo x) \Rightarrow má supremum $\exists y_1 = \sup M_1$

M_2 ... zdola omezená \Rightarrow má infimum $\exists y_2 = \inf M_2$

TVRDÍM: $y_1^n \leq x \leq y_2^n$

DŮKAZ TVRDÍM: SPOREM: Necht' $y_1^n > x$. Pak dle V7 $\exists k : k > \frac{n \cdot y_1^{n-1}}{y_1^n - x}$ (*)

Z (II) SUPREMA plyne, že $\exists h \in M_1 \ \& \ h > y_1 - \frac{1}{k}$.

Potom

$$y_1^n - x \leq y_1^n - h^n = (y_1 - h)(y_1^{n-1} + \dots + h^{n-1}) \leq (y_1 - h) \cdot n \cdot y_1^{n-1} < \frac{1}{k} \cdot n \cdot y_1^{n-1} < y_1^n - x$$

POZNÁMKA 17: $y_1^n - x \leq y_1^n - h^n$... neboť $h \in M_1$ a tedy $h^n < x$

$y_1^n - h^n = (y_1 - h)(y_1^{n-1} + \dots + h^{n-1})$... algebraický vzorec

$(y_1^{n-1} + \dots + h^{n-1})$... n členů

$$y_1^n - h^n = (y_1 - h)(y_1^{n-1} + \dots + h^{n-1}) \leq (y_1 - h) \cdot n \cdot y_1^{n-1} \dots \text{hrubý odhad}$$

$$(y_1 - h) \cdot n \cdot y_1^{n-1} < \frac{1}{k} \cdot n \cdot y_1^{n-1} \dots \text{neboť } y_1 - h < \frac{1}{k}$$

$$\frac{1}{k} \cdot n \cdot y_1^{n-1} < y_1^n - x \dots (*)$$

$\Rightarrow y_1^n - x < y_1^n - x$. SPOR. (důkaz levé části TVRDÍM.: $y_1^n \leq x$).

Analogicky $x \leq y_2^n$.

Celkem $y_1^n \leq x \leq y_2^n$.

Z vlastností suprema $y_1^n = x = y_2^n$, tedy $y_1 = y_2$.

□

VĚTA 10: (MONOTÓNÍ FUNKCE MÁ JEDNOSTRANNÉ LIMITY.) Nechť f je monotónní funkce na $(a; b)$, $a < b$ & $a, b \in \mathbb{R}^*$. Pak $\exists \lim_{x \rightarrow a+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow b-} f(x)$.

DŮKAZ 10: Nechť f je neklesající.

Označme $A = \{f(x), x \in (a; b)\}$; $G = \inf A$

Zvolme $\epsilon > 0$. Dle (ii) infima víme, že $\exists y \in (a; b)$ takové, že $f(y) \in (G; G + \epsilon)$. Protože f je neklesající, tak $\forall z \in (a; y) \Rightarrow f(z) \in \mathcal{U}_{(G)}^\epsilon$.

Položíme $y - a = \delta$, pak $\forall x \in \mathcal{P}_{+(a)}^\delta \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}_{(G)}^\epsilon \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = G$.

Analogicky pro ostatní případy (b , nerostoucí funkce, $\lim = +\infty$)

□

DEFINICE 26: (ROZŠÍŘENÍ POJMU SUPREMUM.) Je-li A shora neomezená, pak klademe $\sup A = +\infty$.

Je-li A zdola neomezená, pak klademe $\inf A = -\infty$.

Je-li $A = \emptyset$, pak klademe $\sup A = +\infty$, $\inf A = -\infty$.

POZNÁMKA 18: Pokud $A \neq \emptyset$, pak $\inf A \leq \sup A$.

2.3 Posloupnosti reálných čísel

DEFINICE 27: POSLOUPNOST je funkce na \mathbb{N} ($f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$). Značíme $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

DEFINICE 28: Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ má limitu $A \in \mathbb{R}^*$, jestliže platí

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in \mathcal{U}_{(A)}^\epsilon.$$

PŘÍKLAD 10: $\sqrt[n]{n}, \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

DŮKAZ PŘÍKLADU: $\sqrt[n]{n} > 1 \forall n \quad \sqrt[n]{n} = 1 + kn$

$$n = (1 + kn)^n$$

SPOREM. Necht' $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \neq 1$, pak $\exists n_j : kn_j > \epsilon$

$$\Rightarrow n_j = (1 + kn_j)^{n_j} > (1 + \epsilon)^{n_j} > 1 + \epsilon n_j + \frac{\epsilon^2 n_j (n_j - 1)}{2} > n_j \epsilon \left(1 + \frac{n_j - 1}{2} \epsilon\right) \nearrow \infty$$

SPOR PRO VELKÉ n_j .

POZNÁMKA 19: NEGACE: Posloupnost nemá limitu A , jestliže $\exists \epsilon > 0 \forall n_0 \in \mathbb{N} \exists n \geq n_0 : a_n \notin \mathcal{U}_{(A)}^\epsilon$

DEFINICE 29: Řekneme, že posloupnost $\{b_k\}_{k=1}^{+\infty}$ je vybraná z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ (tj. je podposloupnost $\{a_n\}$), jestliže existuje rostoucí posloupnost $\{n_k\}_{k=1}^{+\infty}$ tak, že $\{b_k\} = \{a_{n_k}\}, k \in \mathbb{N}$.

POZNÁMKA 20: Ekvivalentní výrok posloupnost nemá limitu:

$$\{a_n\} \text{ nemá } \lim = A \Leftrightarrow \exists \epsilon \exists \text{ vybraná posloupnost } \{a_{n_k}\}_{k=1}^{+\infty} \text{ tak, že } a_{n_k} \notin \mathcal{U}_{(A)}^\epsilon.$$

PŘÍKLAD 11: (i) $\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 \quad a_n = \sqrt[n]{n} = 1 + \delta_n \\ \text{necht' nemá } \lim = 1, \text{ pak } \exists \epsilon, nk : a_{n_k} \geq 1 + \epsilon \end{array} \right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt[n_k]{n_k} \geq 1 + \epsilon$$

$$n_k \geq (1 + \epsilon)^{n_k} \geq 1 + n_k \epsilon + \epsilon^2 \frac{n_k (n_k - 1)}{2}$$

$$\geq n_k[\epsilon + \epsilon^2 \cdot \frac{n_k-1}{2}] \quad \forall k \text{ SPOR.}$$

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$ neexistuje $(-1, 1, -1, 1, \dots)$

(iii) $a > 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$

$$a \geq 1 : 1 \leq \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{n} \text{ (pro dost velké } n \text{ se RHS } \rightarrow 1 \Rightarrow \text{ policajti)}$$

$$a < 1 : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a}} = 1 \text{ (aritmetika limit)}$$

POZNÁMKA 21: Pro posloupnosti platí věty o limitách, které známe pro funkce, najmě pak:

- (i) jednoznačnost limity,
- (ii) limita & uspořádání,
- (iii) aritmetika limit,
- (iv) každá monotónní posloupnost má limitu.

DEFINICE 30: Jestliže má posloupnost vlastní limitu (tj. $A \in \mathbb{R}$), pak říkáme, že posloupnost **KONVERGUJE** k číslu A . V opačných případech diverguje.

VĚTA 11: (O LIMITĚ A OMEZENOSTI.) Každá konvergentní posloupnost je omezená.

DŮKAZ 11: Nechť $a_n = A \in \mathbb{R} \dots$ konvergentní.

$$\text{ZVOLME } \epsilon = 10. \text{ K tomuto } \epsilon \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |a_n - A| < 10.$$

Potom $|a_n| \leq |A| + 10$ pro $n \geq n_0$ (trojúhelníková nerovnost)

$$|a_n| \leq \max_{m=1, \dots, n_0} |a_m|, \quad n \leq n_0.$$

Tedy $\forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq K$, kde definujeme $K = \max\{|a_1|, \dots, |a_{n_0}|, |A| + 10\}$. Tedy posloupnost je omezená.

□

VĚTA 12: (O LIMITĚ VYBRANÉ POSLOUPNOSTI.) Nechť $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = A \in \mathbb{R}^*$ a nechť $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{+\infty}$ je vybraná z $\{a_n\}$. Pak $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} = A$.

DŮKAZ 12: Zvolme $\epsilon > 0$. K němu $\exists n_0 \forall n \geq n_0 : a_n \in \mathcal{U}_{(A)}^\epsilon$.

Zvolím $k_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby $n_{k_0} \geq n_0$. Pak nutně $\forall k \geq k_0 : n_k \geq n_{k_0} \geq n_0$, a tedy $a_{n_k} \in \mathcal{U}_{(A)}^\epsilon$.

□

VĚTA 13: (O LIMITĚ SOUČINU OMEZENÉ A MIZEJÍCÍ POSLOUPNOSTI.)

Nechť $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ (mizející posloupnost) a $\{b_n\}$ je omezená (V3: nemusí mít limitu, a tudíž to nejde z věty o aritmetice limit). Potom $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n = 0$.

DŮKAZ 13: POZOROVÁNÍ: $\lim c_n = 0 \Leftrightarrow \lim |c_n| = 0$ (tj. $A \Rightarrow |A|$) ($\forall \{c_n\}$)

VÍME: $\exists K > 0 : |b_n| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow 0 \leq |a_n b_n| \leq |a_n| \cdot |b_n| \leq |a_n| \cdot K$

(policajti) $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n b_n| = 0$

(POZOROVÁNÍ) $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n = 0$

POZOR NA DETAILS!!!

□

VĚTA 14: (O LIMITĚ PODÍLU Kladné a mizející posloupnosti.)

Nechť $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \in \mathbb{R}^*$, $A > 0$. Nechť $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$. Nechť $\exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 : b_n > 0$. Potom $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$.

DŮKAZ 14: Položím $\tilde{A} = \min\{A, 1\}$. Potom $\exists n_1 \forall n \geq n_1 : a_n \geq \frac{\tilde{A}}{2} > 0$.

Zvolím $K > 0$. Chci dokázat, že k tomu $K \exists n_2 : \forall n \geq n_2 : \frac{a_n}{b_n} \geq K$ ($\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$)

Víme, že $\exists n_3 \quad \forall n \geq n_3 : 0 < b_n < \frac{\tilde{A}}{2K}$.

Položme $n_2 = \max\{n_0, n_1, n_3\}$, pak pro $n \geq n_2 : \frac{a_n}{b_n} > \frac{\frac{\tilde{A}}{2}}{\frac{\tilde{A}}{2K}} = K$. To jsme chtěli dokázat.

□

DEFINICE 31: Jestliže $\{a_n\}$ je shora omezená, pak můžeme definovat posloupnost $\{b_k\} : b_k = \sup\{a_n, n \geq k\}$.

Jestliže $\{a_n\}$ je zdola omezená, pak můžeme definovat posloupnost $\{c_k\} : c_k = \inf\{a_n, n \geq k\}$.

POZNÁMKA 22: POZOROVÁNÍ:

Vždy: $\{b_k\} \geq \{b_{k+1}\}$ ($\{b_k\}$ je nerostoucí)

$\{c_k\} \leq \{c_{k+1}\}$ ($\{c_k\}$ je neklesající)

$\{c_k\} \leq \{a_k \leq \{b_k\}$

Tedy existují $\lim b_k, \lim c_k$ (jsou to monotónní posloupnosti.)

Definujeme:

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n := \lim_{k \rightarrow +\infty} b_k \text{ (limes superior)}$$

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n := \lim_{k \rightarrow +\infty} c_k \text{ (limes inferior)}$$

Není-li $\{a_n\}$ shora (zdola) omezená, pak klademe $\limsup a_n = +\infty$ ($\liminf a_n = -\infty$)

POZNÁMKA 23: (i) \limsup a \liminf existují vždy, i když neexistuje \lim .

(ii) značení $\overline{\lim} = \limsup$, $\underline{\lim} = \liminf$ raději nepoužívat !!!

PŘÍKLAD 12: (i) $\{a_n\} = \{-1, 0, 1, -1, 0, 1, \dots\}$: \lim neexistuje, ale $\limsup a_n = 1$, $\liminf a_n = -1$.

(ii) $\{a_n\} = \frac{(-1)^n}{n}$: $\limsup a_n = \liminf a_n = \lim a_n = 0$.

VĚTA 15: (O VZTAHU LIMITY A \limsup A \liminf .) Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost a $A \in \mathbb{R}^*$. Pak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \Leftrightarrow \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = A$.

DŮKAZ 15: „ \Rightarrow “ Nechť $A \in \mathbb{R}$, zvol $\epsilon > 0$, pak $\exists n_0 \forall n \geq n_0 : |a_n - A| < \epsilon$, tedy $A - \epsilon \leq a_n \leq A + \epsilon$.

Tedy speciálně $A - \epsilon \leq c_{n_0} \leq b_{n_0} \leq A + \epsilon \Rightarrow$

$$\Rightarrow \limsup a_n = \liminf a_n = A. \text{ (neboť } c_{n_0} \leq c_n \leq b_n \leq b_{n_0} \quad \forall n \geq n_0)$$

Nechť $A = \infty$, pak $\limsup = \infty$, neboť $\{a_n\}$ není zdola omezená.

$$\text{Zvol } K > 0, \exists n_0 \forall n \geq n_0 : a_n \geq K \Rightarrow c_{n_0} > K, c_n \geq c_{n_0} > K$$

$$\Rightarrow \lim c_n = \infty \Rightarrow \liminf a_n = \infty.$$

$A = -\infty$ analogicky.

„ \Leftarrow “ $A \in \mathbb{R}: \forall n \in \mathbb{N} c_n \leq a_n \leq b_n \Rightarrow a_n \rightarrow A$ (věta o policajtech)

$A = \infty: c_n \leq a_n \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty \Rightarrow a_n \rightarrow +\infty$ (limita a uspořádání)

$A = -\infty$: analogicky

□

DEFINICE 32: Řekneme, že $A \in \mathbb{R}^*$ je HROMADNOU HODNOTOU POSLOUPNOSTI $\{a_n\}$, jestliže existuje vybraná posloupnost $\{a_{n_k}\}$ taková, že $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = A$. Množinu všech hromadných hodnot značíme $\mathcal{H}(\{a_n\})$.

POZNÁMKA 24: (i) $\mathcal{H}(\{a_n\}) \subset \mathbb{R}^*$ (může se stát, že $\pm\infty \in \mathcal{H}(\{a_n\})$)

(ii) Jestliže $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, pak $\mathcal{H}(\{a_n\}) = \{A\}$ (jednoprvková)

PŘÍKLAD 13: $\{a_n\} = \{0, 1, -, 0, 1, -1, \dots\}$, pak $\mathcal{H}(\{a_n\}) = \{0, 1, -1\}$

$\{\sin n\}$

VĚTA 16: (O VZTAHU \limsup (\liminf) A $\mathcal{H}(\{a_n\})$.) $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = \max \mathcal{H}(\{a_n\})$

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = \min \mathcal{H}(\{a_n\})$$

DŮKAZ 16: stačí pro \limsup : označme $A = \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n \in \mathbb{R}^*$

TVRDÍME:

- $A \in \mathcal{H}(\{a_n\})$
- $a \in \mathbb{R}^*, a \in \mathcal{H}(\{a_n\}) \Rightarrow a \leq A$
- $A \in \mathcal{H}(\{a_n\})$

Je-li $\{a_n\}$ shora omezená, pak máme $\{b_k\} = \sup\{a_n, n \geq k\}$

Definujeme $M_k = \{m > n_{k-1}, b_{n_{k-1}+1} \geq a_n \geq b_{n_{k-1}+1} - \frac{1}{k}\}$

Označme $n_k = \min M_k \Rightarrow$ máme vybranou posloupnost $\{a_{n_k}\}$.

VÍME: $b_{n_k} \geq a_{n_k} \geq b_{n_k} - \frac{1}{k}$ (neboť $b_{n_k} \leq b_{n_{k-1}+1}$)

(policajti) $\Rightarrow A \in \mathcal{H}(\{a_n\})$

• $a \in \mathbb{R}^*, a \in \mathcal{H}(\{a_n\}) \Rightarrow a \leq A$

$a \in \mathcal{H}(\{a_n\}) \Leftrightarrow \exists a_{n_k} \rightarrow a$

$a_{n_k} \leq n_{n_k}$

(limita a uspořádání) $\Rightarrow a \leq A$

□

VĚTA 17: (BOLZANO - WEIERSTRASSOVA VĚTA.) Z každé omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost.

DŮKAZ 17: $\mathcal{H}(\{a_n\}) \neq \emptyset$ (např. $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \in \mathcal{H}(\{a_n\})$)

$\{a_n\}$ omezen $\Rightarrow \mathcal{H}(\{a_n\}) \subset \mathbb{R}$

$\exists A \in \mathbb{R} \ \& \ \exists a_{n_k} \rightarrow A.$

□

VĚTA 18: (BOLZANO - CAUCHYOVA PODMÍNKA.) Posloupnost $\{a_n\}$ má vlastní limitu právě tehdy, jestliže platí BOLZANO-CAUCHYOVA PODMÍNKA:

$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m, n \in \mathbb{N}, m, n \geq n_0$

$|a_m - a_n| < \epsilon$

DŮKAZ 18: Nemusím znát hodnotu limity.

„ \Rightarrow “ Nechť $\exists A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, A \in \mathbb{R}$

VÍME: $\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0: |a_n - A| < \epsilon$

ZVOLÍM $\epsilon > 0$. K němu $\exists n_0$ (viz výše).

Nechť $m, n \geq n_0$, potom

$$|a_n - a_m| = |a_n - A + A - a_m| \leq |a_n - A| + |a_n - A| < 2\epsilon$$

Tvrzení plyne z poznámky o epsilonech.

„ \Leftarrow “ Nechť $\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \forall m, n \geq n_0: |a_n - a_m| < \epsilon$

Speciálně pro n_0 platí: $\forall n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a_{n_0}| < \epsilon$

Tedy $a_{n_0} - \epsilon \leq a_n \leq a_{n_0} + \epsilon \forall n \geq n_0$

Tudíž také $a_{n_0} - \epsilon \leq c_n \leq a_n \leq b_n \leq a_{n_0} + \epsilon$

Protože $a_{n_0} \in \mathbb{R}$, $\lim b_n \in \mathbb{R}$, $\lim c_n \in \mathbb{R}$

Dále: $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n - \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq (a_{n_0} + \epsilon) - (a_{n_0} - \epsilon) = 2\epsilon$

$\Rightarrow \forall \epsilon > 0 \limsup a_n - \liminf a_n < 2\epsilon$

$\Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$

$\exists \lim a_n \in \mathbb{R}$

□

VĚTA 19: (HEINEHO VĚTA.) Nechť f je funkce definovaná na nějakém prstencovém okolí $\mathcal{P}_{(a)}^\delta$ bodu $a \in \mathbb{R}^*$. Nechť $A \in \mathbb{R}^*$, potom jsou následující dva výroky ekvivalentní:

(i) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$

(ii) $\forall \{x_n\}$ takovou, že

- $x_n \in D_f \forall n \in \mathbb{N}$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$,
- $x_n \neq a \forall n \in \mathbb{N}$,

platí:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A.$$

DŮKAZ 19: (i) \Rightarrow (ii)

Zvolme $\epsilon > 0$, pak k němu dle (i) $\exists \delta > 0$

$$(*) f(\mathcal{P}_{(a)}^\delta) \subset \mathcal{U}_{(A)}^\epsilon$$

K tomuto $\delta > 0$ pak $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : x_n \in \mathcal{U}_{(a)}^\delta$.

Protože ale $x_n \neq a$, tak $x_n \in \mathcal{P}_{(a)}^\delta$

Tedy dle (*) $f(x_n) \in \mathcal{U}_{(A)}^\epsilon \in \mathbb{R} \forall n \geq n_0$, a tedy platí (ii).

(ii) \Rightarrow (i)

SPOREM. Nechť $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq A$, tj. $\exists \epsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x =: x_n, x_n \in \mathcal{P}_{(a)}^{\frac{1}{n}} \cap \mathcal{P}$

$f(x_n) \notin \mathcal{U}_{(A)}^\epsilon$. Potom $\{x_n\} \subset D_f, x_n \neq a$ ($x_n \in \mathcal{P}_{(a)}^{\frac{1}{n}}$) a $\lim x_n = a$, neboť $|x_n - a| < \frac{1}{n} \rightarrow 0$.

Přitom $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq A$

SPOR s (ii).

□

POZNÁMKA 25: V19 - uplatnění při spojitosti: V19 platí i pro jednostranné limity. Pak ale $x_n > a, x_n < a$ atd.

POZNÁMKA 26: Důsledek V19: HEINEHO „DEFINICE“ SPOJITOSTI. Funkce f je spojitá v bodě $a \in \mathbb{R}$ právě tehdy, když

$$x_n \in D_f, x_n \rightarrow a \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(a)$$

$$(tj. \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a))$$

2.4 Hrubší vlastnosti spojitých funkcí na intervalu.

DEFINICE 33: FUNKCE f JE SPOJITÁ NA $(a; b)$, jestliže je spojitá v každém bodě $x \in (a; b)$.

DEFINICE 34: FUNKCE f JE SPOJITÁ NA $[a; b]$, jestliže je spojitá v každém bodě $x \in (a; b)$, spojitá zprava v a a spojitá zleva v b .

DEFINICE 35: FUNKCE f JE SPOJITÁ NA $(a; b]$, jestliže je spojitá v každém bodě $x \in (a; b)$ a spojitá zleva v b .

DEFINICE 36: FUNKCE f JE SPOJITÁ NA $[a; b]$, jestliže je spojitá v každém bodě $x \in (a; b)$, spojitá zprava v a .

VĚTA 20: (DARBOUXOVA VLASTNOST SPOJITÝCH FUNKCÍ.) Nechť f je spojitá na intervalu $[a, b]$ a necht' BÚNO $f(a) < f(b)$. Nechť $y \in (f(a); f(b))$. Pak $\exists x \in (a; b)$ takové, že $f(x) = y$.

DŮKAZ 20: Nechť $y \in (f(a); f(b))$.

Definujeme $A = \{x \in [a; b], f(x) < y\}$. Pak $A \neq \emptyset$, neboť $a \in A$. Dále: A omezená, neboť $A \subset [a, b]$.

Tedy $\exists x \in [a, b] : x = \sup A$.

TVRDÍM: $f(x) = y$.

$x \neq b$, neboť $f(b) > y$, f spojitá.

Pak $\exists \epsilon > 0 : f(b) - \epsilon > y$ & $\exists \delta > 0$ tak, že

$\forall z \in (b - \delta; b) \Rightarrow f(z) \in \mathcal{U}_{f(b)}^\epsilon \Rightarrow b \neq \sup A$.

Obdobně: $x \neq a$, a tedy $x \in (a; b)$.

Nechť $f(x) < y$. Potom $\exists \epsilon > 0$ tak, že $y \notin \mathcal{U}_{f(x)}^\epsilon$, tedy $x \neq \sup A \dots$ SPOR (není pod y).

Nechť $f(x) > y$. Potom $\exists \eta > 0, y \notin \mathcal{U}_{f(x)}^\eta, \exists \delta > 0 : \forall z \in (x - \delta; x + \delta) \Rightarrow f(z) \in \mathcal{U}_{f(x)}^\eta$, tedy $A \cap (x - \delta; x) \neq \emptyset$

$x \neq \sup A$

SPOR S (II) SUPREMA.

$f(x) = y$.

□

VĚTA 21: (SPOJITÝ OBRAZ INTERVALU.) Spojitý obraz intervalu je interval (nebo 1 bod).

DŮKAZ 21: Nechť $y_1, y_2 \in f(\mathcal{I})$, kde \mathcal{I} je interval a f je spojitá na I , BÚNO y_1, y_2 .

Nechť $z \in (y_1, y_2)$, potom dle V20 $\exists x \in \mathcal{I}$ tak, že $f(x) = y$, tedy $y \in f(\mathcal{I})$. Tedy $f(\mathcal{I})$ má tuto vlastnost $\forall y_1 < y < y_2, y_1, y_2 \in f(\mathcal{I}) \Rightarrow y \in f(\mathcal{I})$, a tedy $f(\mathcal{I})$ je interval.

□

DEFINICE 37: Nechť f je reálná funkce, $A \subset D_f, a \in A$. Řekneme, že funkce nabývá v $a \in A$ svého MAXIMA VZHLEDEM K A , jestliže $f(a) \geq f(x) \forall x \in A$.

DEFINICE 38: Nechť f je reálná funkce, $A \subset D_f, a \in A$. Řekneme, že funkce nabývá v $a \in A$ svého MINIMA VZHLEDEM K A , jestliže $f(a) \leq f(x) \forall x \in A$.

DEFINICE 39: Nechť f je reálná funkce, $A \subset D_f, a \in A$. Řekneme, že funkce nabývá v $a \in A$ svého OSTRÉHO MAXIMA VZHLEDEM K A , jestliže $f(a) > f(x) \forall x \in A$.

DEFINICE 40: Nechť f je reálná funkce, $A \subset D_f, a \in A$. Řekneme, že funkce nabývá v $a \in A$ svého OSTRÉHO MINIMA VZHLEDEM K A , jestliže $f(a) < f(x) \forall x \in A$.

DEFINICE 41: Nechť f je reálná funkce, $A \subset D_f, a \in A$. Řekneme, že funkce nabývá v $a \in A$ svého LOKÁLNÍHO MAXIMA VZHLEDEM K A , jestliže $\exists \delta > 0 : \forall x \in \mathcal{U}_{(a)}^\delta \Rightarrow f(a) \geq f(x)$.

DEFINICE 42: Nechť f je reálná funkce, $A \subset D_f, a \in A$. Řekneme, že funkce nabývá v $a \in A$ svého LOKÁLNÍHO MINIMA VZHLEDEM K A , jestliže $\exists \delta > 0 : \forall x \in \mathcal{U}_{(a)}^\delta \Rightarrow f(a) \leq f(x)$.

DEFINICE 43: Nechť f je reálná funkce, $A \subset D_f, a \in A$. Řekneme, že funkce nabývá v $a \in A$ svého OSTRÉHO LOKÁLNÍHO MAXIMA VZHLEDEM K A , jestliže $\exists \delta > 0 : \forall x \in \mathcal{U}_{(a)}^\delta \Rightarrow f(a) > f(x)$.

DEFINICE 44: Nechť f je reálná funkce, $A \subset D_f, a \in A$. Řekneme, že funkce nabývá v $a \in A$ svého OSTRÉHO LOKÁLNÍHO MINIMA VZHLEDEM K A , jestliže $\exists \delta > 0 : \forall x \in \mathcal{U}_{(a)}^\delta \Rightarrow f(a) < f(x)$.

VĚTA 22: (SPOJITOST A EXTRÉMY!!!) Nechť f je spojitá funkce na uzavřeném intervalu $[a; b]$. Pak f nabývá na $[a; b]$ svého maxima i minima.

DŮKAZ 22: Definujeme $A = \{f(x), x \in [a; b]\}$... obor hodnot H_f

Označme $y = \sup A$.

Pak (z (ii) suprema) existuje posloupnost $\{x_n\} \subset [a; b]$ taková, že $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y$.

Protože $\{x_n\} \subset [a; b] \Rightarrow \{x_n\}$ je omezená. Tedy dle V17 existuje vybraná posloupnost $\{x_{n_k}\}$, která je konvergentní (má limitu): $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$. Co dělá posloupnost $\{f(x_{n_k})\}$?

a] Protože $f(x_{n_k})$ je vybraná z $f(x_n)$, pak $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = y$.

b] Protože f je spojitá, plyne z důsledku V19, že $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x)$.

a] + b] $\Rightarrow f(x) = y$ (věta o jednoznačnosti limity posloupnosti.)

□

VĚTA 23: (SPOJITOST A OMEZENOST.) Spojitá funkce na uzavřeném intervalu je omezená.

DŮKAZ 23: Dle V22 $\exists x_{min}, x_{max}$ takové, že $\{f(x), x \in \mathcal{I}\} \subseteq [f(x_{min}); f(x_{max})]$.

□

POZNÁMKA 27: Pozor na podstatnost předpokladů ve větách V22 a V23!!!

VĚTA 24: (O SPOJITOSTI INVERZNÍ FUNKCE.) Nechť f je spojitá a rostoucí na \mathcal{I} . Pak inverzní funkce je definovaná, spojitá a rostoucí na $f(\mathcal{I})$.

DŮKAZ 24: Je definovaná a rostoucí \rightarrow DCV.

Zřejmě je f^{-1} definovaná a rostoucí na $f(\mathcal{I})$. Dokážeme, že f^{-1} je spojitá.

Nechť $y \in f(\mathcal{I})$. Pak $\exists x \in \mathcal{I} : y = f(x)$ a tedy $x = f^{-1}(y)$.

Nechť x je vnitřní bod intervalu \mathcal{I} .

Zvolme $\epsilon > 0$. Najdu x_1, x_2 tak, aby $x_1 < x < x_2$: $(x_1, x_2) \subseteq \mathcal{U}_{(x)}^\epsilon$.

Zvolím $\delta > 0$ tak, aby $\mathcal{U}_{(y)}^\delta \subset (f(x_1); f(x_2))$.

Potom: $f^{-1}(\mathcal{U}_{(y)}^\delta) \subset f^{-1}(f(x_1); f(x_2)) = (x_1; x_2) \subseteq \mathcal{U}_{(x)}^\epsilon = \mathcal{U}_{(f^{-1}(y))}^\epsilon \Rightarrow f^{-1}$ je spojitá.

Nechť x je levý krajní bod \mathcal{I} , zvol $\epsilon > 0$. Pak $\exists x_2$ tak, že $(x_1; x_2) \subset \mathcal{U}_{+(x)}^\epsilon$. Najdu $\delta > 0$ tak, aby $\mathcal{U}_{+(y)}^\delta \subset (f(x); f(y))$.

Pak $f^{-1}(\mathcal{U}_{+(y)}^\delta) \subset \dots \subset \mathcal{U}_{+f^{-1}(y)}^\epsilon$ a stačí si uvědomit, že $f(x) = y$ je nutně levým krajním bodem $f(\mathcal{I})$.

□

2.5 Zavedení elementárních funkcí.

Elementární funkce (transcendentní funkce)

- exponenciála, logaritmus, obecná a^x ; $a > 0$
- trigonometrické ($\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$)
- cyklometrické ($\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arccotg} x$)
- hyperbolické $\sinh x$, $\cosh x$, $\operatorname{tgh} x$, $\operatorname{cotgh} x$

Nová čísla, například e , π

Problém: co je větší? e^π , π^e

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

VĚTA 25: (ZAVEDENÍ EXPONENCIÁLNÍ FUNKCE.) Existuje právě jedna reálná funkce „exp“, $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ taková, že platí

$$(i) \exp(x + y) = \exp x \cdot \exp y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

$$(ii) \exp x \geq 1 + x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

POZNÁMKA 28: Dokážeme, že funkce splňující (i) a (ii) již nutně splňuje také následující vztah:

$$\exp x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \quad x \in \mathbb{R},$$

a že tato limita existuje $\forall x \in \mathbb{R}$.

Potom definujeme $e := \exp(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ a píšeme $\exp x = e^x$.

DŮKAZ 25:

- DŮKAZ JEDNOZNAČNOSTI:
- $\exp(n \cdot x) = (\exp x)^n$; (indukce, (i))

- $\exp(0) = 1$; $\exp(0 + 0) = \exp(0) = \exp(0) \cdot \exp(0) = \exp^2(0)$;

$$\Rightarrow \begin{cases} \exp(0) = 0 \Rightarrow \text{nevyhovuje (ii)} \\ \exp(0) = 1 \end{cases}$$

- $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$; $1 = \exp(0) = \exp[x + (-x)] = \exp(x) \cdot \exp(-x)$

- $\exp(x) \neq 0$; důsledek předchozího

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$; plyne z $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ a předchozího

- $\exp(x) > 1 \quad \forall x > 0$; opět ihned plyne z (ii)

- $\exp(x) \nearrow$ NA \mathbb{R} ; $x < y$, PAK $y - x > 0$

$$\frac{\exp(y)}{\exp(x)} = \exp(y - x) > 1 \Rightarrow \exp(y) > \exp(x) \dots \text{ POUZE PRO TAKOVÁ } x, \text{ PRO KTERÉ } \exp(x) \geq 0$$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1$

$$1 + x \leq \exp(x)$$

$$1 - x \leq \exp(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$1 + x \leq \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$$

$$\Rightarrow 1 + x \leq \exp(x) \leq \frac{1}{1-x} \quad \forall x \in (-1; \infty)$$

$$x \leq \exp(x) - 1 \leq \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{x-1} \quad /:x \quad (x \in \mathcal{P}_{(0)}^\delta)$$

$$\Rightarrow 1 \leq \frac{\exp(x) - 1}{x} \leq \frac{1}{1-x} \dots \text{ POLICAJTI}$$

- $\exp(x)$ JE SPOJITÁ NA \mathbb{R} .

NECHŤ $a \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow a} [\exp(x) - \exp(a)] = \lim_{x \rightarrow a} \exp(a) \cdot \left[\frac{(x-a)-1}{x-a} \cdot (x-a) \right] = 0 \quad (\exp(a) \rightarrow \exp(a); \frac{(x-a)-1}{x-a} \rightarrow 1; (x-a) \rightarrow 0)$$

[\Rightarrow JE SPOJITÁ, NIKDY $\neq 0$, $0 < H_f < \infty \Rightarrow$ NEPOTKÁ SE S 0.]

- $\exp(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$; DARBOUX

- $\exp(x)$ JE ROSTOUCÍ NA \mathbb{R} ; VIZ VÝŠE

- $\exp(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, $x \in \mathbb{R}$

$$(I) \Rightarrow 1 + \frac{x}{n} \leq \exp\left(\frac{x}{n}\right) = [\exp(x)]^{\frac{1}{n}}$$

$$(\text{UMOCNĚNÍM}) \Rightarrow \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \exp(x)$$

$$(II) \Rightarrow 1 - \frac{x}{n} \leq \exp\left(-\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{[\exp(x)]^{\frac{1}{n}}}$$

NECHŤ $n > |x|$ (x JE PEVNĚ ZVOLENÉ ČÍSLO $\in \mathbb{R}$)

$$\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n} > \exp(x) \quad (\text{PRO } n > |x|)$$

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \exp(x) \leq \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n} \quad /: \text{LHS}$$

$$\Rightarrow 1 \leq \frac{\exp(x)}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} \leq \frac{1}{\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\exp(x)}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} = 1$$

$$\text{TVRDÍM: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n = 1$$

$$1 \geq \left(1 + \frac{x^2}{n^2}\right)^n \geq 1 - \frac{x^2}{n^2}$$

• DŮKAZ EXISTENCE:

- $x \dots$ PEVNĚ $\Rightarrow \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \nearrow$ POSLOUPNOST

$$\text{CHCI: } \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq \left(1 + \frac{x}{n-1}\right)^{n-1} \quad (\text{STAČÍ PRO DOST VELKÉ } n)$$

$$\text{TJ.: } \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq \left(1 + \frac{x}{n-1}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-1}$$

$$\text{TJ.: } \left(\frac{n+x}{n} \cdot \frac{n-1}{n-1+x}\right)^n \geq \frac{n-1}{n-1+x} \quad (\text{PRO } n > |x| + 1)$$

BERNOULLI VE TVARU:

$$y^n \geq 1 + n(y-1) \quad \forall y \geq 0$$

$$\Rightarrow \text{LHS} \geq 1 + n \left(\frac{n+x}{n} \cdot \frac{n-1}{n-1+x-1}\right)$$

$$= 1 - n + \frac{n+x}{n-1+x}(n-1)$$

$$(n-1) \left[\frac{n+x}{n-1+x} - 1\right] = (n-1) \frac{1}{n-1+x} = \text{RHS}$$

- $\forall x \in \mathbb{R}$ JE $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ OMEZENÁ POSLOUPNOST

$$1. \text{ KROK: } 1 - x \leq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n} \quad \forall x \quad \forall n > |x| - \text{DCV}$$

$$2. \text{ KROK: } \text{dosaď do 1. kroku } x \rightarrow \frac{x}{m}, m \in \mathbb{N}, m > |x|$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{x}{m} \leq \left(1 + \frac{x}{m \cdot n}\right)^{-n} \quad \forall m, n \text{ velké}$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{x}{m \cdot n}\right)^{m \cdot n} \leq \left(1 - \frac{x}{m}\right)^{-m} \quad \forall m, n > |x|$$

\Rightarrow zafixovat m a pošleme $n \rightarrow \infty$

\Rightarrow omezenost vybrané posloupnosti, což stačí díky monotonii.

□

DEFINICE 45: Značíme: $\exp(x) = e^x$, kde $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$.

DEFINICE 46: Definujeme funkci „log“: $\log : (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ jako inverzní k funkci exp.

DEFINICE 47: Definujeme $a^b = e^{b \cdot \log a}$ $a > 0, b \in \mathbb{R}$

POZNÁMKA 29: (i) ověřte si, že platí obecná pravidla pro počítání s mocninami.

$$a^{b+c} = a^b \cdot a^c; a^{b \cdot c} = (a^b)^c; (a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c$$

(ii) log je funkce rostoucí a spojitá (V24) na $D_f = (0; \infty)$

$$(iii) \log(x \cdot y) = \log x + \log y$$

$$\log\left(\frac{1}{x}\right) = -\log x$$

$$\log(x) \leq x - 1 \quad \forall x \in (0; \infty)$$

$$(iv) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x-1} = 1$$

$$x^2 = e^{2 \log x} = e^{\log x + \log x} = x \cdot x$$

VĚTA 26: (ZAVEDENÍ FUNKCÍ $\sin x$ A $\cos x$.) Existuje právě jedna dvojice funkcí (S, C) , $S, C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takových, že:

$$(i) S(x+y) = S(x)C(y) + C(x)S(y)$$

$$C(x+y) = C(x)C(y) - S(x)S(y)$$

(ii) S je lichá na \mathbb{R}

C je sudá na \mathbb{R}

(iii) $C > 0$ na $(0, 1)$

$$C(1) = 0$$

Pak existuje $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{S(x)}{x}$, označme ji symbolem π .

DEFINICE 48: $\sin x := S\left(\frac{x}{\pi}\right)$

$$\cos x := C\left(\frac{x}{\pi}\right)$$

DŮKAZ 26:

- $S(0) = 0$

$$S(2x) = 2S(x)C(x)$$

$$C(2x) = C^2(x) - S^2(x)$$

$$S(x) + S(y) = 2S\left(\frac{x+y}{2}\right)C\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

- $C(0) = 1$

$$C(0) = C(0+0) = C^2(0) - S^2(0) = C^2(0) = \begin{cases} 0? \\ 1? \end{cases}$$

$$C(0) = C(x+(-x)) = C(x)C(-x) - S(x)S(-x) = C^2(x) + S^2(x)$$

$$C(0) \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow C \equiv 0 \ \& \ S \equiv 0$$

SPOR s (iii) $\Rightarrow C(0) = 1$

BONUS: $S^2(x) + C^2(x) = 1 \ \forall x$

$$S\left(\frac{1}{2}\right) = ?, \ C\left(\frac{1}{2}\right) = ?$$

$$S(1) = 2S\left(\frac{1}{2}\right)C\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow C\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow S\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

- DEFINUJEME INTUITIVNĚ HODNOTY S, C V BODECH $k \cdot 2^{-n}$ (indukcí ze sčítacích vzorců)

- VZORCE PRO POLOVIČNÍ ARGUMENT:

$$S\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-C(x)}{2}}$$

$$C\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+C(x)}{2}} \text{ atd.}$$

- $x \in (0, 1)$, $\exists \{x_n\} \rightarrow x$ DYADICKÁ, DEFINUJEME

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(x_n)$$

$$C(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} C(x_n)$$

- $\lim_{x \rightarrow 0} C(x) = 1$

$$\text{rekurentní posloupnost } a_{n+1} = \sqrt{\frac{1+a_n}{2}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$$

- S JE ROSTOUCÍ NA $(0, \frac{1}{2})$

$$x, y, x - y \in (0, \frac{1}{2})$$

$$S(x - y) = S(x)C(y) - C(x)S(y) < S(x) \dots \text{monotonie}$$

$$S(x)C(y) \Rightarrow < 1, C(x)S(y) \Rightarrow > 0$$

$$C(1) = C^2\left(\frac{1}{2}\right) - S^2\left(\frac{1}{2}\right) = 0 - 1 = -1$$

- $C(1) = -1$ („1 - periodicita“)
- $S(x + 1) = S(x)C(1) - C(x)S(1) = -S(x)$ ($C(1) = -1, S(1) = 1$)
- $S(x + 2) = S(x)$ („1 - periodicita“)
- $S\left(\frac{1}{2} - x\right) = C(x)$

$$S\left(\frac{1}{2} - x\right) = S\left(\frac{1}{2}\right)C(x) - C\left(\frac{1}{2}\right)S(x) = C(x)$$

$$S\left(\frac{1}{2}\right) = 1; C\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

- $\lim_{x \rightarrow 0} C(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} S(x) = 0 \Rightarrow S$ SPOJITÁ V 0

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (-s(x) - s(a)) = \lim_{x \rightarrow a} 2S\left(\frac{x-a}{2}\right)C\left(\frac{x-a}{2}\right) = 0$$

$$S\left(\frac{x-a}{2}\right) = 0; C\left(\frac{x-a}{2}\right) \leq 1$$

- $\exists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{S(x)}{x}$

$$\text{definujeme } T(x) = \frac{S(x)}{C(x)}, x \in (0; \frac{1}{2})$$

$$\text{cvičení: } T(x + y) = \frac{T(x) + T(y)}{1 - T(x)T(y)}$$

$$\Rightarrow S(x + y) \leq S(x) + S(y), T(x + y) \geq T(x) + T(y)$$

$$\Rightarrow T(2^{-n} \cdot k) \geq k \cdot T(2^{-n}) \geq kS(2^{-n}) \geq S(2^{-n} \cdot m) \cdot \frac{k}{m} \quad \forall k, m \in \mathbb{N}$$

$$T\left(\frac{y}{x}\right) \geq \frac{S(y)}{S(x)} \quad \forall x, y \text{ dyadické, ze spojitosti } \forall x \in (0; \frac{1}{2})$$

$$\Rightarrow \pi > \frac{S(x)}{x} \quad \forall x$$

$$\pi > \frac{S(x)}{x} = \frac{T(x) \cdot C(x)}{x} \geq \pi \cdot C(x) \text{ polica jti: } \pi \cdot C(x) \rightarrow \pi \Rightarrow \frac{T(x) \cdot C(x)}{x} \rightarrow \pi$$

□

POZNÁMKA 30: $\sin x, \cos x$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{spojité} \\ \text{omezené} \\ 2\pi - \text{periodické} \\ \pi - \text{antiperiodické} \end{array} \right.$ funkce na \mathbb{R} , pro které platí základní

limity:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

DEFINICE 49: $\operatorname{tg} x := \frac{\sin x}{\cos x}, x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

POZNÁMKA 31: $\operatorname{tg} x$ je na svém definičním oboru spojitý (TG NENÍ ROSTOUCÍ!!!) a π -periodický

DEFINICE 50: $\operatorname{cotg} x := \frac{\cos x}{\sin x}, x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

POZNÁMKA 32: $\operatorname{cotg} x$ má obdobné vlastnosti jako $\operatorname{tg} x$

DEFINICE 51: $\arcsin x = \sin^{-1} x$

$$\arcsin x = y \Leftrightarrow x = \sin y, y \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$$

Pak $\arcsin x$ je spojitý na $[-1; 1]$, rostoucí, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$

POZNÁMKA 33: Inverzní funkce pouze k prostým funkcím!!!

DEFINICE 52: $\arccos x = \cos^{-1} x$

$$\arccos x = y \Leftrightarrow x = \cos y, y \in [0; \pi], \text{ kdy } x \in [-1; 1]$$

DEFINICE 53: $\operatorname{arctg} x = \operatorname{tg}^{-1} x$

$$\operatorname{arctg} x = y \Leftrightarrow x = \operatorname{tg} y, y \in \mathbb{R}, x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

POZNÁMKA 34: $\operatorname{arctg} x$ je spojitá

DEFINICE 54: $\operatorname{arccotg} x = \operatorname{tg}^{-1} x$

$$\operatorname{arccotg} x = y \Leftrightarrow x = \operatorname{cotg} y, y \in (0; \pi), x \in \mathbb{R}$$

POZNÁMKA 35: (i) cyklometrické funkce ($\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arccotg} x$) jsou na svých definičních oborech spojitě (u $\arcsin x$, \arccos včetně ± 1) a monotónní.

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \frac{-\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\operatorname{arccotg} x}{x} = \pi$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{arccotg} x}{x} = 0$$

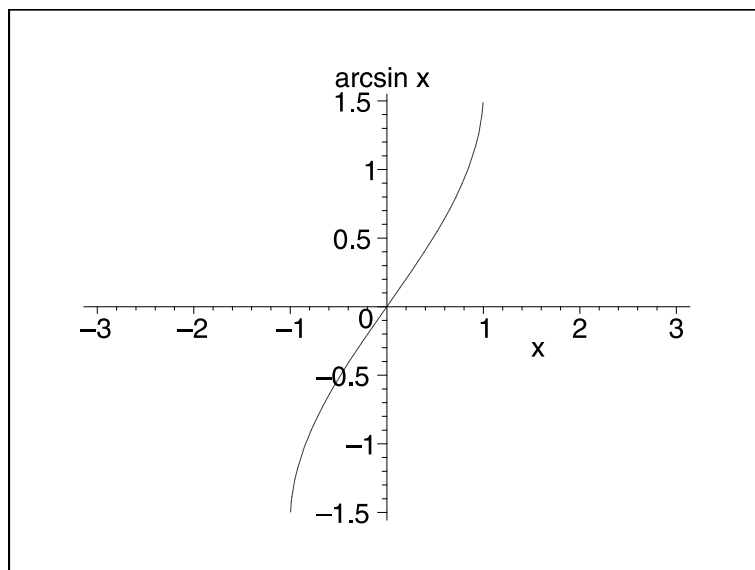
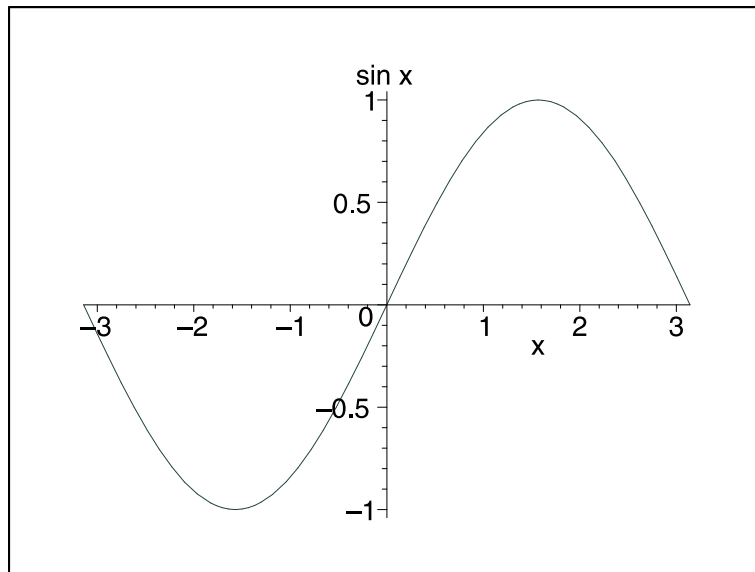
$$(iv) \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \forall x \in [-1; 1]$$

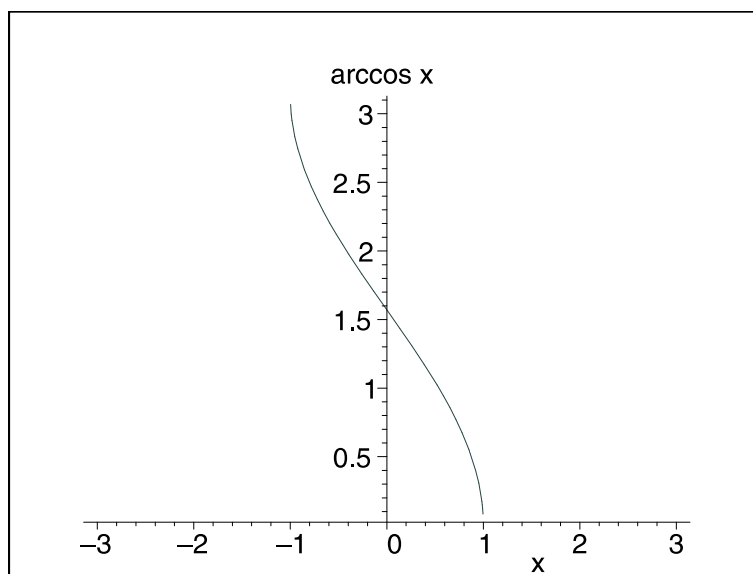
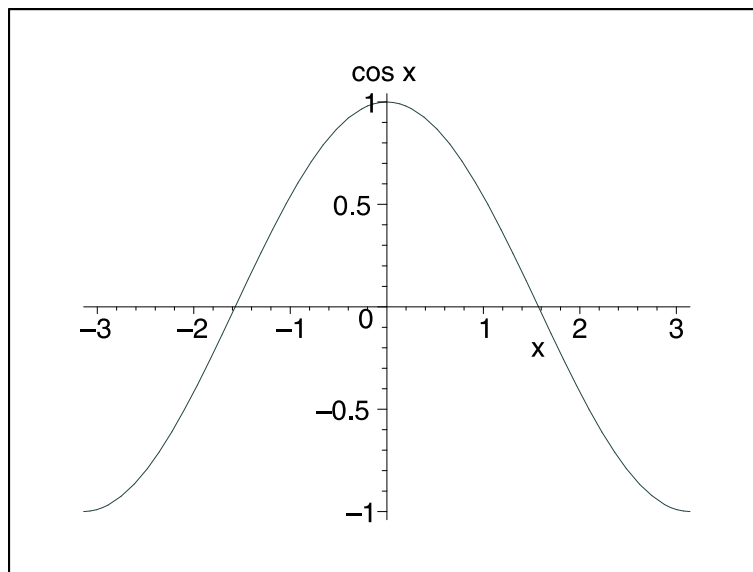
$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$$

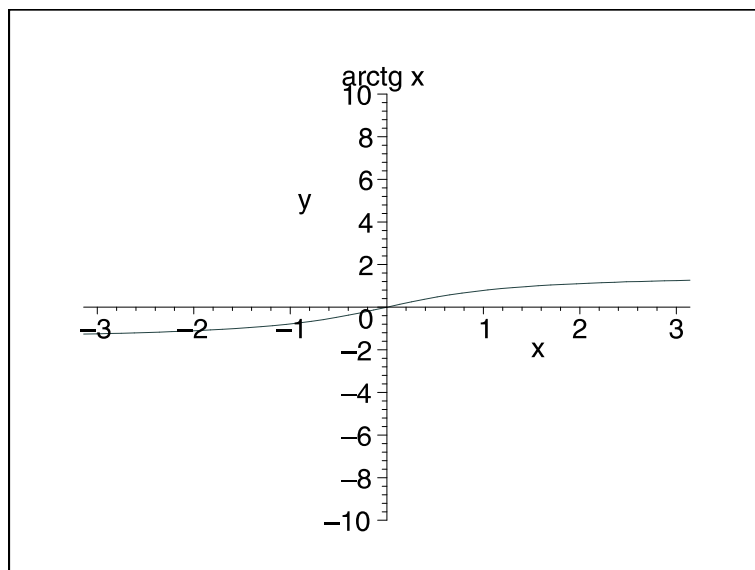
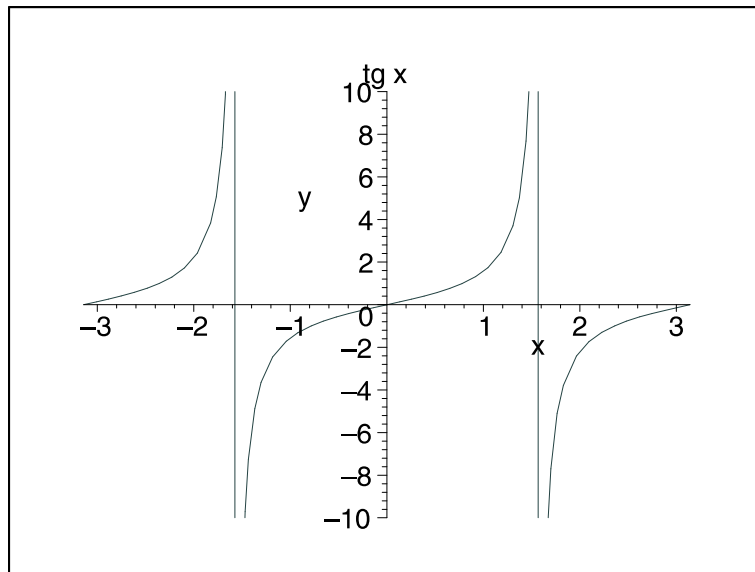
(v) $\sin x$, $\arcsin x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{arctg} x$ jsou liché

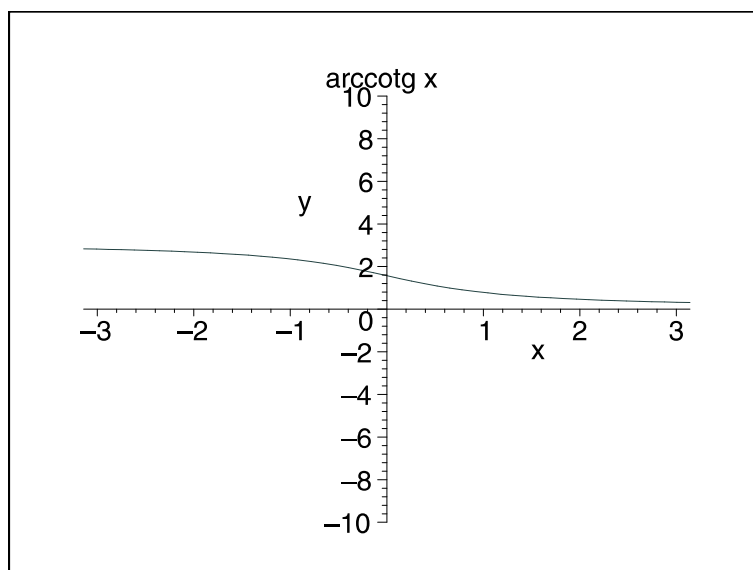
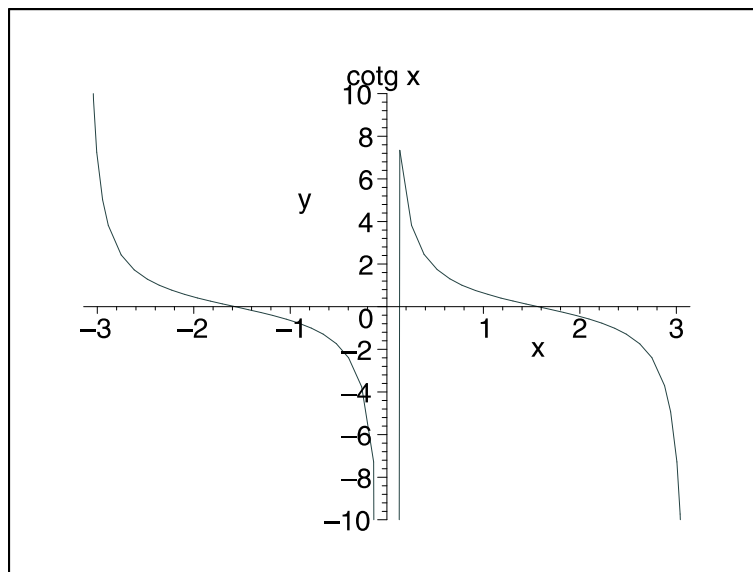
$\cos x$, $\operatorname{cotg} x$ jsou sudé

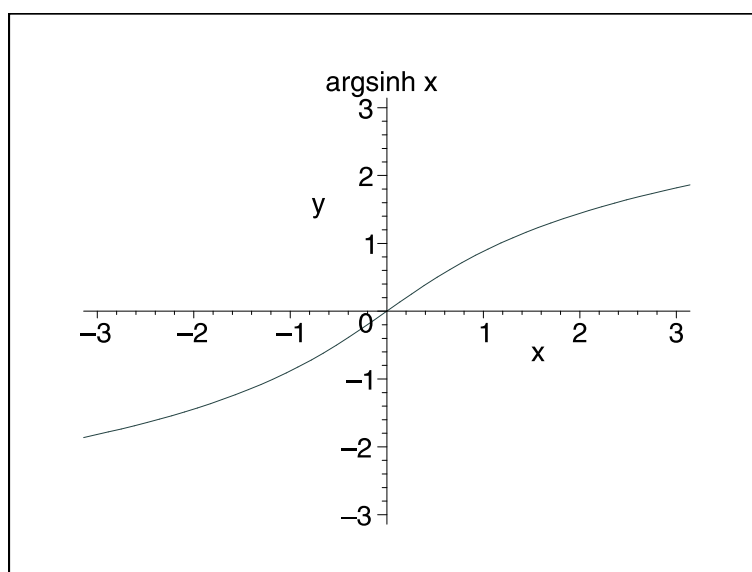
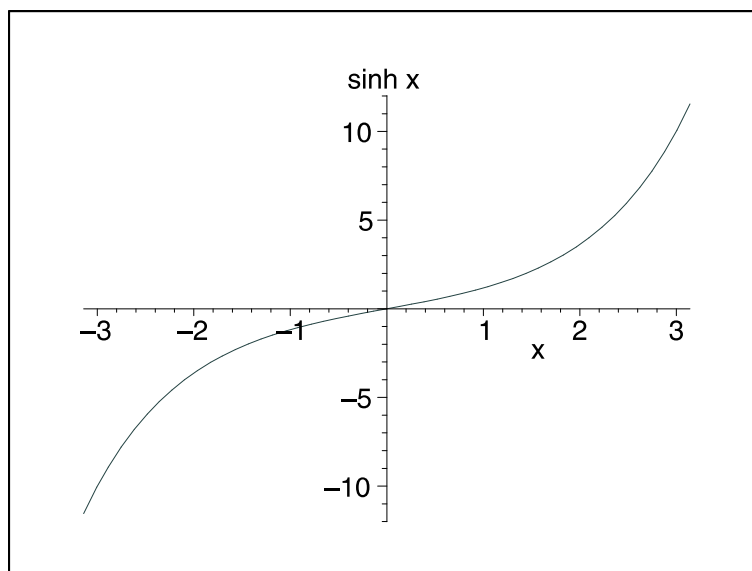
$\arccos x$, $\operatorname{arccotg} x$ nejsou ani liché, ani sudé

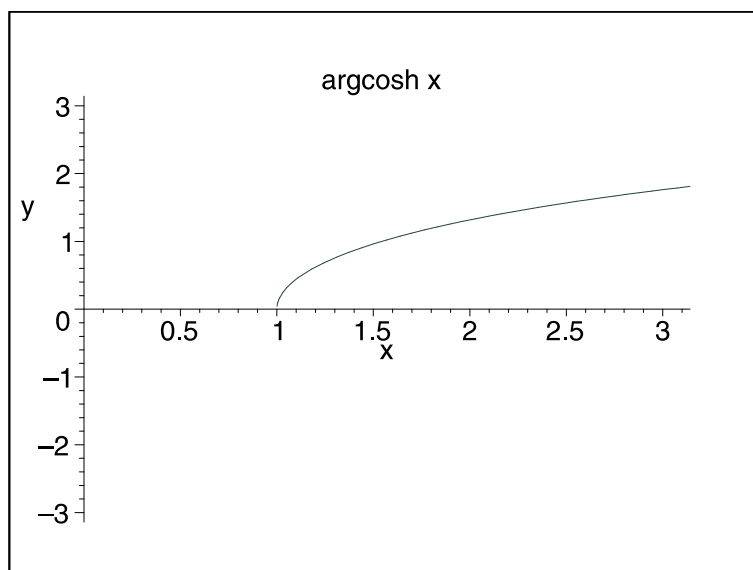
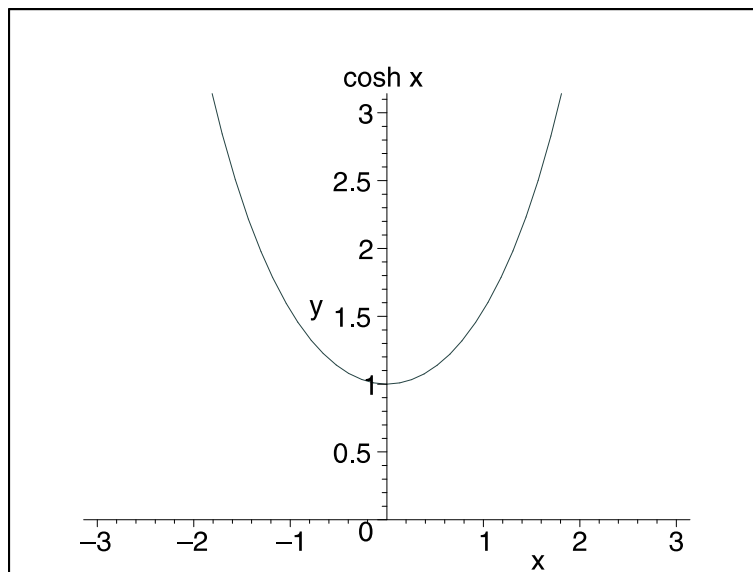


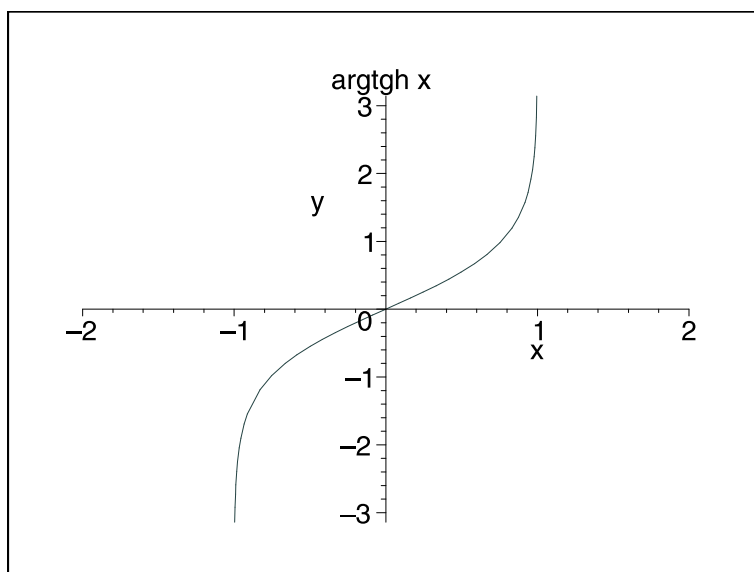
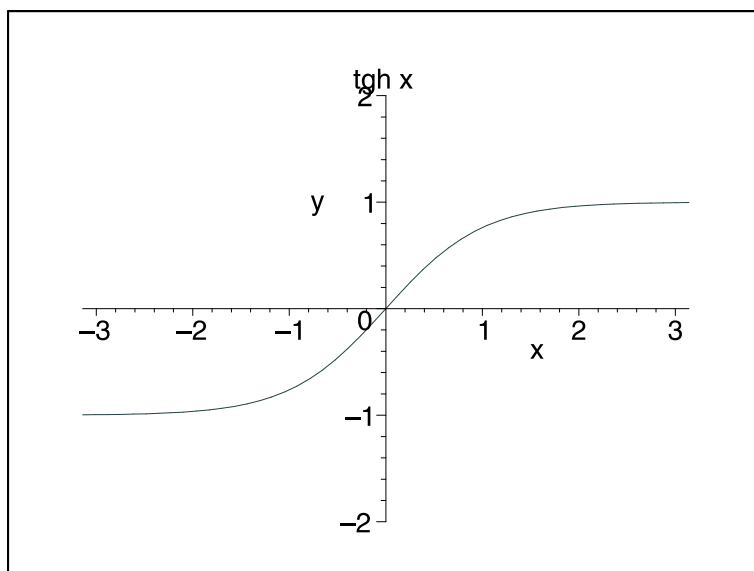


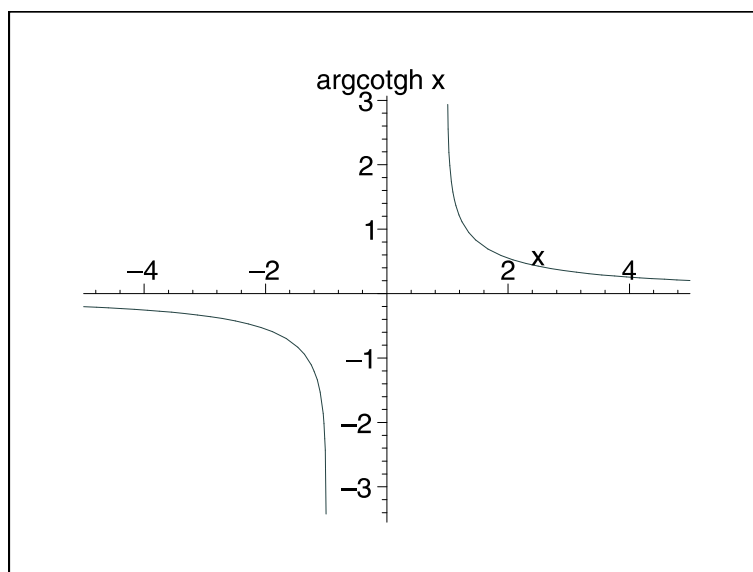
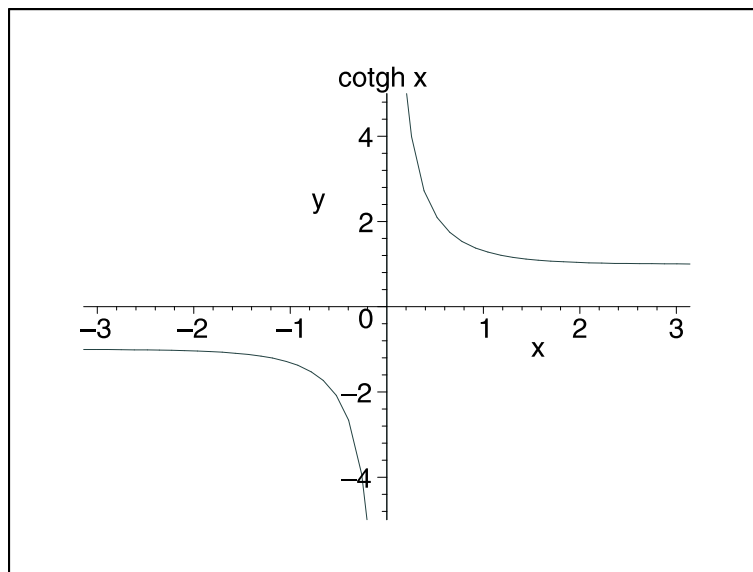












2.6 Derivace reálných funkcí.

DEFINICE 55: Nechť f je reálná funkce, $a \in \mathbb{R}$, $a \in D_f$. Pak řekneme, že f má v a DERIVACI $f'(a)$, jestliže existuje limita:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

DEFINICE 56: Nechť f je reálná funkce, $a \in \mathbb{R}$, $a \in D_f$. Pak řekneme, že f má v a DERIVACI ZPRAVA $f'_+(a)$, jestliže existuje limita:

$$f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

DEFINICE 57: Nechť f je reálná funkce, $a \in \mathbb{R}$, $a \in D_f$. Pak řekneme, že f má v a DERIVACI ZLEVA $f'_-(a)$, jestliže existuje limita:

$$f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0_-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

POZNÁMKA 36: $f(x) = |x|$, $f'_+(0) = 1$, $f'_-(0) = -1$, $f'(0)$ neexistuje

POZNÁMKA 37: (i) DERIVACE NEMUSÍ EXISTOVAT

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \begin{cases} \text{existuje} & \begin{cases} \text{vlastní, } f'(a) \in \mathbb{R} \\ \text{nevlastní} & \begin{cases} f'(a) = +\infty \\ f'(a) = -\infty \end{cases} \end{cases} \\ \text{neexistuje} \end{cases}$$

PŘÍKLAD 14: $f(x) = \sqrt[3]{x}$

$$f'(0) = +\infty$$

PŘÍKLAD 15: $f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1; & x > 0 \\ 0; & x = 0 \\ -1; & x < 0 \end{cases}$

Existuje $f'(a)$?

$$\text{SGN}'(a) = +\infty \begin{cases} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\text{sgn}(0+h) - \text{sgn}(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1-0}{h} = +\infty \\ \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\text{sgn}(0+h) - \text{sgn}(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-1-0}{h} = +\infty \end{cases}$$

$$(ii) \exists f'(a) = A \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \exists f'_+(a), f'_-(a), f'_+(a) = f'_-(a) = A$$

$$(iii) !!! f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$$

PŘÍKLAD 16: (i) $n \in \mathbb{N}, f(x) = x^n, a \in \mathbb{R}$:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h)^n - a^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^n + a^{n-1}h + \dots + h^n - a^n}{h} = n \cdot a^{n-1}$$

$$(ii) f(x) = e^x$$

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{a+h} - e^a}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} e^a \frac{e^h - 1}{h} = e^a$$

$$(iii) f(x) = \sin x$$

$$\cos a \quad f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h \cos a + \sin a (\cos h - 1)}{h} = \cos a + \sin a \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h^2} \cdot h =$$

$$\text{DCV: } \cos' x = -\sin x$$

$$(iv) f(x) = \log x$$

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(a+h) - \log a}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log\left(1 + \frac{h}{a}\right)}{h} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a}$$

$$\log' x = \frac{1}{x}$$

VĚTA 27: (O VZTAHU DERIVACE A SPOJITOSTI.) Má-li funkce f v bodě a VLASTNÍ derivaci, pak je v tomto bodě a spojitá.

$$\text{DŮKAZ 27: } f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \in \mathbb{R}$$

$$\text{tedy: } \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} (x-a) = f'(a) \cdot 0 = 0$$

$$(\text{z definice spojitosti: } \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = 0)$$

□

VĚTA 28: (O ARITMETICE DERIVACÍ.) Nechť existuje $f'(a), g'(a)$.

(i) Potom $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$, má-li RHS smysl;

$$(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a), \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

(derivování je lineární operace.)

(ii) Jestliže g je spojitá v a , pak

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a), \text{ má-li RHS smysl.}$$

(iii) Jestliže g je spojitá v a a $g(a) \neq 0$, pak

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{[g(a)]^2}, \text{ má-li RHS smysl.}$$

DŮKAZ 28: (i) - DCV.

$$(ii) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) \cdot g(a+h) - f(a) \cdot g(a)}{h} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(a+h) - f(a)] \cdot g(a+h) + [g(a+h) - g(a)] \cdot f(a+h)}{h} = f'(a) \cdot g(a) + g'(a) \cdot f(a) \quad (g(a+h) \text{ spojitá} \rightarrow g(a))$$

(iii) g spojitá, $g(a) \neq 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 \forall x \in \mathcal{U}_{(a)}^\delta : g(x) \neq 0$. Neboli $\forall h \in \mathcal{U}_{(0)}^\delta : g(a+h) \neq 0$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(a+h) - f(a)}{g(a+h)} - \frac{f(a) - f(a)}{g(a)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) \cdot g(a) - f(a) \cdot g(a+h)}{h \cdot g(a+h) \cdot g(a)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(a+h) - f(a)]g(a) - [g(a+h) - g(a)]f(a)}{h \cdot g(a+h) \cdot g(a)}$$

($g(a)$ spojitá) atd.

□

VĚTA 29: (O DERIVACI SLOŽENÉ FUNKCE.) Nechť $\exists g'(a)$ a nechť je g spojitá v a . (může být $g'(a) \in \mathbb{R}^*$). Nechť $g(a) = b$ a nechť $\exists f'(b)$. Potom

$$(f \circ g)'(a) = f'(b) \cdot g'(a), \text{ má-li RHS smysl.}$$

POZNÁMKA 38: $(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$

DŮKAZ 29: VÍME: $\exists \epsilon > 0$; f je definována na $\mathcal{U}_{(b)}^\epsilon$,

$\exists \delta > 0$; g je definována na $\mathcal{U}_{(a)}^\delta$.

(i) PŘÍPAD: $f'(b)$ je vlastní:

$$\text{DEFINUJEME: } F(y) := \begin{cases} \frac{f(y)-f(b)}{y-b}; & y \in \mathcal{P}_{(b)}^\epsilon \\ f'(b); & y = b \end{cases}$$

POZOROVÁNÍ: $F(y)$ je spojitá v b :

$$(f \circ g)'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x-a} = F(g(x)) \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x-a}; \text{ platí pro } x \in \mathcal{P}_{(a)}^\delta$$

PŘÍPAD: (a) $g(x) = g(a)$, pak $0 = 0$

$$(b) \ g(x) \neq g(a), \text{ pak } \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)} \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x-a}$$

$$\frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)} \Rightarrow F(g(x)), \text{ neboť } b = g(a)$$

$$\text{STAČÍ: } \lim_{x \rightarrow a} F(g(x)) \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x-a} = (*)$$

$F(g(x))$ - dle věty o limitě složené funkce: F je spojitá (viz výše)
a $F(g(x)) = f'(b)$

(*): $= f'(b) \cdot g'(a)$ (existuje-li, ale to je předpoklad)

(ii) $f'(b) = \pm\infty$, potom $g'(a) \neq 0$, BÚNO $g'(a) > 0$

$$0 < g'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x-a} \Rightarrow \frac{g(x) - g(a)}{x-a} > 0 \text{ na jistém } \mathcal{P}_{(a)}$$

a tedy také $g(x) \neq g(a)$ na jistém $\mathcal{P}_{(a)}$.

(limitní přechod $x \rightarrow a$): $\frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x-a} = \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)} \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x-a} \rightarrow f'(b) \cdot g'(a) \dots$ věta o limitě součinu

$$\frac{f(y) - f(b)}{y-b} \Rightarrow f'(b), \text{ pro } y \rightarrow b$$

$$y(x) \rightarrow g(a) = b \text{ pro } x \rightarrow a$$

Varianta $g(x)$ se vyhýbá limitě.

□

PŘÍKLAD 17: (i) $x > 0, \alpha \in \mathbb{R}$.

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \log x})' = e^{\alpha \log x} \cdot (\alpha \log x)' = x^\alpha \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}, \forall x > 0$$

$$(ii) (\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\text{DCV: } (\operatorname{cotg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

PŘÍKLAD 18: (i) $[\sin(x^2 + 1)]' = \cos(x^2 + 1) \cdot 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$(ii) [e^{\operatorname{tg} x}]' = e^{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}; \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

VĚTA 30: (O DERIVACI INVERZNÍ FUNKCE.) Nechť f je spojitá a ryze monotónní na intervalu \mathcal{I} . Nechť a je vnitřní bod intervalu \mathcal{I} . Označme b bod $f(a)$. Potom:

$$(i) \text{ je-li } f'(a) \in \mathbb{R}^* \setminus \{0\}, \text{ pak } (f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)},$$

$$(ii) \text{ je-li } f'(a) = 0 \text{ a } f \text{ je rostoucí (klesající), pak } (f^{-1})'(b) = +\infty \text{ } (-\infty).$$

DŮKAZ 30: dle V24 je f^{-1} definovaná, spojitá a ryze monotónní na $f(\mathcal{I})$ a $f(\mathcal{I})$ je interval (V22).

Bod $b = f(a)$ zřejmě je vnitřní bod intervalu $f(\mathcal{I})$.

$$\text{CHCEME: } \lim_{y \rightarrow b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} \quad (f^{-1}(b) \rightarrow a)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

$$\lim_{y \rightarrow b} f^{-1}(y) = f^{-1}(b) = a \quad (\text{spojitost } f^{-1})$$

$$f^{-1}(y) \neq f^{-1}(b) \text{ pro } y \in \mathcal{P}(b) \quad (f^{-1} \text{ je prostá})$$

VĚTA O LIMITĚ SLOŽENÉ FUNKCE:

$$\lim_{y \rightarrow b} \frac{f(f^{-1}(y)) - f(a)}{f^{-1}(y) - a} = \lim_{y \rightarrow b} \frac{y - b}{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)} = f'(a) \text{ pro } y \rightarrow b$$

PŘÍPAD (I) je hotov

$$\lim_{y \rightarrow b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{1}{f'(a)} \dots \text{ hotovo dle věty o limitě podílu}$$

PŘÍPAD (II)

$$\frac{y - b}{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)} \rightarrow 0$$

f je rostoucí $\Rightarrow f^{-1} \nearrow \Rightarrow$ výrazy $(y - b)$ a $[f^{-1}(y) - f^{-1}(b)]$ mají stejné znaménko

$\Rightarrow \lim f^{-1} = +\infty$

□

PŘÍKLAD 19: (i) $(\exp(x))' = \exp(x) \quad x \in \mathbb{R}$

$$(\exp(x))' = \frac{1}{\log y} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y = \exp(x), \text{ kde } y = \exp x$$

$$(\log x)' = \frac{1}{x} \quad x > 0$$

$$(\log x)' = \frac{1}{\exp'(y)} = \frac{1}{\exp(y)} = \frac{1}{x}, \text{ kde } y = \log x$$

$$(ii) (\operatorname{arctg})' = \frac{1}{\operatorname{tg}'(\operatorname{arctg} x)} = \cos^2(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x) + 1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{arctg} x := [\operatorname{tg} x | (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})]^{-1}$$

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1 / : \cos^2 z$$

$$\frac{\sin^2 z}{\cos^2 z} + 1 = \frac{1}{\cos^2 z} / : \cos^2 z$$

$$\operatorname{tg}^2 z + 1 = \frac{1}{\cos^2 z}$$

$$\cos^2 z = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 z + 1} \quad \forall z : \cos z \neq 0$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\operatorname{arctg})' = \frac{1}{x^2 + 1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(iii) (\operatorname{arccotg})' = \frac{-1}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R} \dots \text{DCV.}$$

$$(iv) (\operatorname{arcsin})' = \frac{1}{\sin'(\operatorname{arcsin} x)} = \frac{1}{\cos(\operatorname{arcsin} x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\operatorname{arcsin} x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

$$x \in (-1; 1)$$

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1$$

$$\cos^2 z = 1 - \sin^2 z$$

$$\cos z = \pm \sqrt{1 - \sin^2 z} \quad !!! \quad \pm$$

pokud $Z : \cos > 0$

speciálně: pokud $Z \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) : \cos z > 0$

$$(v) (\arccos)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in (-1; 1) \dots \text{DCV.}$$

VĚTA 31: (NUTNÁ PODMÍNKA EXISTENCE (LOKÁLNÍHO) EXTRÉMU.) Nechť $a \in \mathbb{R}$ je vnitřní bod intervalu \mathcal{I} . Nechť funkce f má v bodě a (lokální) extrém. Potom $f'(a)$ buď neexistuje, nebo je 0.

DŮKAZ 31: NEPŘÍMO: pokud $a \in \mathcal{I}$ aplňuje předpoklady a $f'(a) \neq 0 \Rightarrow \text{SPOR.}$

BÚNO předpokládejme $f'(a) > 0$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0 \text{ na jistém } \mathcal{P}_{(a)} \subset \mathcal{I}$$

$$\begin{cases} f(x) - f(a) > 0 \text{ na } \mathcal{P}_{+(a)} \\ f(x) - f(a) > 0 \text{ na } \mathcal{P}_{-(a)} \end{cases} \quad \text{SPOR s existencí extrému}$$

□

PŘÍKLAD 20: Hledám extrémy f na \mathcal{I} . Z V31 lze předem vyloučit vnitřní body \mathcal{I} , kde $\exists f' \neq 0$. !!! extrém musí existovat !!!

2.7 Rolleova věta a její důsledky.

VĚTA 32: (ROLLEOVA VĚTA O STŘEDNÍ HODNOTĚ.) Nechť f je spojitá na omezeném uzavřeném intervalu $\mathcal{I} = [a; b]$. Nechť $\exists f'(x) \quad \forall x \in (a, b)$. Nechť $f(a) = f(b)$. Pak $\exists \xi \in (a, b)$ tak, že $f'(\xi) = 0$

DŮKAZ 32: Musí platit všechny tři předpoklady!!!

f spojitá na $[a; b]$.

Nechť f je konstantní ($f(x) = f(a) \quad \forall x \in [a; b]$). Pak tvrzení platí triviálně.

Nechť $\exists x \in (a, b)$ tak, že $f(x) \neq f(a)$. Potom $\exists \xi \leftarrow (a; b)$ takové, že f má v ξ lokální extrém. Víme, že $\exists f'(\xi)$. Pak uvnitř $f'(\xi) = 0$.

□

VĚTA 33: (LAGRANGEOVA VĚTA O STŘEDNÍ HODNOTĚ.) Nechť f je spojitá na $[a; b]$, nechť $\exists f'(x) \forall x \in (a; b)$. Potom $\exists \xi \in (a; b)$ tak, že $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

DŮKAZ 33: Definujme funkci F předpisem $F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x - a)$.

Pak $F(a) = F(b) = 0$. Dále: $\exists F'(x) \forall x \in (a; b)$.

Z V32: $\exists \xi \in (a; b): F'(\xi) = 0$. Ale $F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$.

□

VĚTA 34: (CAUCHYOVA VĚTA O STŘEDNÍ HODNOTĚ.) (Mean Value Theorem.) Nechť f, g jsou spojitě na $[a, b]$, nechť $\exists f'(x) \forall x \in (a; b)$, nechť $\exists g'(x)$ vlastní a nenulová $\forall x \in (a; b)$.

Pak $\exists \xi \in (a; b)$ tak, že $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

DŮKAZ 34: V32 $\Rightarrow g(b) \neq g(a)$ (jinak $\exists \xi : g'(\xi) = 0$).

Položme $H(x) = (f(x) - f(a))(g(b) - g(a)) - (g(x) - g(a))(f(b) - f(a))$.

Pak $H(a) = H(b) = 0$.

$H'(x) \cdot f'(x)(g(b) - g(a)) - g'(x)(f(b) - f(a)) \in \mathbb{R}^*$ (je definována)

$$f'(x) \in \mathbb{R}^*; (g(b) - g(a)) \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow \in \mathbb{R}^*$$

$$g'(x) \in \mathbb{R}; (f(b) - f(a)) \in \mathbb{R}$$

$$V32 \Rightarrow \exists \xi \in (a; b) H'(\xi) = 0 \Rightarrow \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

□

VĚTA 35: (L'HOSPITALOVO PRAVIDLO.) Nechť $a \in \mathbb{R}^*$. Nechť existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

(f, g reálné funkce definované na nějakém okolí bodu a .)

Nechť buďto:

(i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ (verze „ $\frac{0}{0}$ “), nebo

(ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} |g(x)| = +\infty$ (verze „ $\frac{\text{něco}}{\infty}$ “).

Potom $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

PŘÍKLAD 21: (i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+1}{3x+4} \neq \lim_{h \rightarrow 1} \frac{2}{3} \neq \frac{2}{3}$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^{-1/x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} e^{-1/x} \frac{1}{x^2}$

(iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x+\sin x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{1+\cos x}$ neexistuje

(iv) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-\sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{6}$

(v) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x-1-x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x-1}{2x} = \frac{1}{2}$

DŮKAZ 35: Nechť platí (i) („ $\frac{0}{0}$ “) a nechť $a \in \mathbb{R}$.

VÍME $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \mathbb{R}^*$. $\exists \delta > 0$ tak, že $\forall x \in \mathcal{P}_{+(a)}^\delta \exists f'(x), \exists g'(x) \neq 0$, obě vlastní. Dodefinuji $f(x) = g(x) = 0$.

Nechť $x \in (a, a + \delta)$, potom f, g jsou spojitě na $[a, x]$.

Navíc g má na $(a; x)$ vlastní a nenulovou derivaci.

V34 $\Rightarrow \exists \xi \in (a; x) : \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ (ale ξ závisí na $x : \xi = \xi(x)$)!!!

Zvolme $\epsilon > 0 : \exists \delta_0 \in (0; \delta]$ tak, že $\frac{f'(y)}{g'(y)} \in \mathcal{U}_{(A)}^\epsilon \forall y \in (a; a + \delta_0)$

Nechť $x \in (a, a + \delta_0)$, pak $\xi(x) \in (a; a + \delta_0) \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))} \in \mathcal{U}_{(A)}^\epsilon$ pro (i) a $a \in \mathbb{R}$.

NECHŤ PLATÍ (I) A $a = -\infty$.

Převеdeme na předcházející případ tím, že vystřhujeme limitu.

POZOROVÁNÍ: $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{y \rightarrow 0^+} h\left(\frac{-1}{y}\right)$ (pokud existují!!!) - Věta o limitě složené funkce.

$$\text{Potom: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f\left(\frac{-1}{y}\right)}{g\left(\frac{-1}{y}\right)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{F(y)}{G(y)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{F'(y)}{G'(y)} =$$

$$F(y) = f\left(\frac{-1}{y}\right), G(y) = \dots$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f'(y) \cdot \frac{1}{y^2}}{g'(y) \cdot \frac{1}{y^2}} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f'\left(\frac{-1}{y}\right)}{g'\left(\frac{-1}{y}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Nechť platí (ii), jen pro $A = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ (DCV)

Zvolme $\epsilon \in (0; 1)$. Pak $\exists \delta_1 > 0 \forall z \in \mathcal{P}_{+(a)}^\delta = \left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| < \epsilon$

Zafixujeme $y \in \mathcal{P}_{+(a)}^{\delta_1}$

Zvolíme $\delta_2 > 0, \delta_2 < \delta_1$ tak, aby $\frac{|f(y)| + |g(y)| \cdot A}{|g(a)|} < \epsilon \forall z \in \mathcal{P}_{+(a)}^{\delta_2}$.

Nechť $x \in \mathcal{P}_{+(a)}^{\delta_2}$. Pak f, g splňují předpoklady V34 na $[x; y]$.

$$\text{Tedy } \exists \xi \in (x; y) : \frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(y)}{g(x)} - \frac{g(y) f'(\xi)}{g(x) g'(\xi)} + \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

$$\text{Tedy } \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \right| \leq \left| \frac{1}{g(x)} (f(y)) - \frac{f'(y)}{g'(y)} (g(y)) \right| \leq \frac{|f(y)| + \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \right| |g(y)|}{|g(x)|} = \frac{|f(y)| + A |g(y)|}{|g(x)|} + \frac{\left| A - \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \right| |g(y)|}{|g(x)|} < \epsilon + A\epsilon$$

□

VĚTA 36: (O LIMITĚ DERIVACÍ.) Nechť f je spojitá zprava v bodě $a \in \mathbb{R}$, nechť existuje limita: $\lim_{x \rightarrow a^+} f'_+(a) = A \in \mathbb{R}^*$. Potom existuje $f'_+(a) = A$.

$$\text{DŮKAZ 36: } f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = (\text{L'H}) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{1}.$$

□

VĚTA 37: (O VZTAHU DERIVACE A MONOTONIE.) Nechť $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ je interval (nedegenerovaný, tj. není to jeden bod) a nechť f je spojitá na \mathcal{I} . Nechť $\exists f'(a)$ v každém vnitřním bodu $a \in \mathcal{I}$.

Potom platí:

- (i) Je-li $f' > 0$ NA INTERVALU \mathcal{I} , pak f je rostoucí NA INTERVALU \mathcal{I} .
- (ii) Je-li $f' \geq 0$ NA INTERVALU \mathcal{I} , pak f je neklesající NA INTERVALU \mathcal{I} .
- (iii) Je-li $f' < 0$ NA INTERVALU \mathcal{I} , pak f je klesající NA INTERVALU \mathcal{I} .
- (iv) Je-li $f' \leq 0$ NA INTERVALU \mathcal{I} , pak f je nerostoucí NA INTERVALU \mathcal{I} .

DŮKAZ 37: Stačí pro (i), ostatní obdobně.

Nechť $a, b \in \mathcal{I}$, $a < b$.

Potom f je spojitá na $[a, b]$ a $\exists f'(x)$ pro $x \in (a; b)$. Tedy podle Lagrangeovy věty $\exists \xi \in (a; b)$ tak, že $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi) > 0$ (dle (i) derivace > 0).

Protože $(b - a) > 0 \Rightarrow f(b) - f(a) > 0$.

□

2.8 Konvexita a konkávita.

POZNÁMKA 39: $a \mapsto f'(a)$ (derivace je číslo, $f'(a) \in \mathbb{R}^*$)

$x \mapsto f'(x)$ (první derivace jakožto nová funkce)

DEFINICE 58: Nechť $\exists f^{(n)}(x)$ vlastní pro $x \in \mathcal{P}_{(a)}^\delta$, $a \in \mathbb{R}$. Potom $(n+1)$ -ní derivací f v bodě a budeme rozumět $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(a+h) - f^{(n)}(a)}{h}$.

DEFINICE 59: Nechť $\exists f'(a) \in \mathbb{R}$. Pak definujeme $T_a = \{[x; y] \in \mathbb{R}^2, y = f(a) + f'(a)(x - a)\}$ („tečna“).

Řekneme, že bod $[x, f(x)]$ grafu funkce f leží NAD TEČNOU T_a , jestliže $f(x) > f(a) + f'(a)(x - a)$.

Řekneme, že bod $[x, f(x)]$ grafu funkce f leží POD TEČNOU T_a , jestliže $f(x) < f(a) + f'(a)(x - a)$.

DEFINICE 60: Řekneme, že a je INFLEXNÍ BOD funkce f (f má v a inflexi), jestliže $\exists \delta > 0$ tak, že $[x, f(x)]$ leží nad $T_a \forall x \in (a - \delta; a)$

& $[x, f(x)]$ leží pod $T_a \forall x \in (a, a + \delta)$ nebo naopak.

VĚTA 38: (NUTNÁ PODMÍNKA EXISTENCE INFLEXE.) Necht' $\exists f''(a) \neq 0$. Pak f nemá inflexi v bodě a .

DŮKAZ 38: BÚNO necht' $f''(a) > 0$. Tedy $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h} > 0$.

Tedy $\exists \delta > 0 : \forall x \in (a - \delta; a)$ je $f'(x) < f'(a)$

& $\forall x \in (a; a + \delta)$ je $f'(x) > f'(a)$.

Zvolme $y \in (a; a + \delta)$: Lagrangeova věta:

Potom $\exists \xi \in (a; y)$ takové, že $\frac{f(y) - f(a)}{y - a} = f'(\xi)$

$$\frac{f(y) - f(a)}{y - a} = f'(\xi) > f'(a).$$

Tedy $f(y) > f(a) + f'(a)(y - a)$.

Takže $[y, f(y)]$ leží nad $T_a \forall y \in (a; a + \delta)$.

Zvolme $z \in (a - \delta; a)$, pak $\exists \xi \in (z, a) : \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = f'(\xi) < f'(a)$

Tedy (pozor $(z - a < 0)$!!!) $f(z) > f(a) + f'(a)(z - a)$

takže $[z, f(z)]$ leží nad $T_a \forall z \in (a - \delta; a)$.

Tedy f nemá v a inflexi.

□

VĚTA 39: (POSTAČUJÍCÍ PODMÍNKA EXISTENCE INFLEXE.) Necht' f má spojitou první derivaci na $(a; b)$. Necht' $\exists y \in (a; b)$ takové, že $f''(x) > 0 \forall x \in (a, y)$ & $f''(x) < 0 \forall x \in (y; b)$.

Potom y je bodem inflexe funkce f .

DŮKAZ 39: $\forall x \in (y, b)$ dle Lagrangeovy věty $\exists \xi \in (y; x)$ takové, že $f'(\xi) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$.

VÍME: (z věty o vztahu derivace a monotonie), že f' klesá na $(y; b)$, takže $f'(\xi) < f'(y)$.

Tedy $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} < f'(y) \Rightarrow f(x) < f(y) + f'(y)(x-y) \Rightarrow$ nad T_a .

ANALOGICKY: $\forall z \in (a; y) \exists \eta \in (z, y): \frac{f(z)-f(y)}{z-y} = f'(\eta) < f'(y)$ (neboť f' roste na $(a; y)$).

Tedy $f(z) > f(y) + f'(y)(z-y)$.

Tedy f má inflexi v y .

□

DEFINICE 61: Řekneme, že funkce f je KONVEXNÍ na otevřeném intervalu $(a; b)$, jestliže $\forall x < y < z, x, y \in (a; b)$: platí $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$.

DEFINICE 62: Řekneme, že funkce f je RYZE KONVEXNÍ na otevřeném intervalu $(a; b)$, jestliže $\forall x < y < z, x, y \in (a; b)$: platí $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} < \frac{f(z)-f(x)}{z-x} < \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$.

DEFINICE 63: Řekneme, že funkce f je KONKÁVNÍ na otevřeném intervalu $(a; b)$, jestliže $\forall x < y < z, x, y \in (a; b)$: platí $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \geq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$.

DEFINICE 64: Řekneme, že funkce f je RYZE KONKÁVNÍ na otevřeném intervalu $(a; b)$, jestliže $\forall x < y < z, x, y \in (a; b)$: platí $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} > \frac{f(z)-f(x)}{z-x} > \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$.

VĚTA 40: (O VZTAHU KONVEXITY A JEDNOSTRANNÝCH DERIVACÍ.) Nechť funkce f je konvexní na otevřeném intervalu \mathcal{I} a nechť $a \in \mathcal{I}$ (vnitřní bod a). Potom existují vlastní jednostranné derivace $f'_+(a), f'_-(a)$.

DŮKAZ 40: $f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Zvol $a < x < y < b$. Pak (z konvexity) $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(y)-f(a)}{y-a}$. To znamená, že funkce

$F : z \mapsto \frac{f(z)-f(a)}{z-a}$ je neklesající na $(a; b)$.

Tedy $\exists \lim_{x \rightarrow a^+} F(x)$, ale zatím nevíme, zda je vlastní.

Zvol $y \in \mathcal{I}, z < a$.

$$\text{Pak } F(z) = \frac{f(z)-f(a)}{z-a} \leq \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = F(x) \quad \forall x \in (a; b)$$

$$\text{Tedy } \forall x \in (a; b) \quad F(x) \geq F(z) \in \mathbb{R}$$

Tedy F je zdola omezená na $(a; b)$ (např. konstantou $F(z)$).

$$\text{Tedy } \exists \lim_{x \rightarrow a^+} F(x) = f'_+(a) \in \mathbb{R}.$$

Analogicky pro $f'_-(a)$.

□

POZNÁMKA 40: Víme: $\exists f'_+(a) \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ spojitá zprava v a .

Víme: $\exists f'_-(a) \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ spojitá zleva v a .

Dále víme, že f je spojitá v $a \Leftrightarrow f$ je spojitá zprava i zleva v a .

VĚTA 41: (O VZTAHU KONVEXITY A SPOJITOSTI.) Nechť f je konvexní na $(a; b)$, pak je taky spojitá na $(a; b)$.

DŮKAZ 41: Dle V40: $\exists f'_+, f'_- \Rightarrow$ (viz Poznámka výše) $\Rightarrow f$ je spojitá.

□

POZNÁMKA 41: Pozor!!! V41 platí na OTEVŘENÉM intervalu.

VĚTA 42: (O VZTAHU KONVEXITY A DRUHÉ DERIVACE.) Nechť f má spojitou první derivaci na otevřeném intervalu $(a; b)$. Potom je-li $f'' > 0$ na $(a; b)$, pak f je ryze konvexní na $(a; b)$.

Nechť f má spojitou první derivaci na otevřeném intervalu $(a; b)$. Potom je-li $f'' \geq 0$ na $(a; b)$, pak f je konvexní na $(a; b)$.

Nechť f má spojitou první derivaci na otevřeném intervalu $(a; b)$. Potom je-li $f'' < 0$ na $(a; b)$, pak f je ryze konkávní na $(a; b)$.

Nechť f má spojitou první derivaci na otevřeném intervalu $(a; b)$. Potom je-li $f'' \leq 0$ na $(a; b)$, pak f je konkávní na $(a; b)$.

DŮKAZ 42: stačí pro $f'' > 0$ na $(a; b)$, potom f' je neklesající na $(a; b)$ - věta o vztahu první derivace a monotonie.

Zvolíme x, y, z : $a < x < y < z < b$

Lagrangeova věta $\Rightarrow \exists \xi_1 \in (x, y) : f'(\xi_1) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$

$\exists \xi_2 \in (y, z) : f'(\xi_2) = \frac{f(z)-f(y)}{z-y} \Rightarrow (\xi_2 > \xi_1) \Rightarrow f'(\xi_1) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y} = f'(\xi_2)$

$f(z) \geq f(y) + (z-y) \frac{f(y)-f(x)}{y-x} / - f(x) \cdot (z-x)$

$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \geq \frac{f(y)-f(x) + (z-y) \frac{f(y)-f(x)}{y-x}}{z-x} = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$

ANALOGICKY: $\frac{f(z)-f(x)}{z-x} = \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$

□

2.9 Průběh funkce.

DEFINICE 65: Řekneme, že funkce $x \mapsto ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ je ASYMPTOTOU FUNKCE f v $+\infty$ ($-\infty$), jestliže $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax - b) = 0$ ($\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax - b) = 0$)

POZNÁMKA 42: Funkce nemusí mít asymptotu (asymptoty). Příklad: $\cos x$.

VĚTA 43: (O TVARU ASYMPTOTY.) Funkce f má v $+\infty$ asymptotu $ax + b$ právě, když $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}$ (vlastní limitu) & $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = b \in \mathbb{R}$ (vlastní limita).

DŮKAZ 43: „ \Rightarrow “ Nechť f má asymptotu $ax + b$. Potom $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} =$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x) - ax - b}{x} + \frac{ax + b}{x} \right) = 0 + a = a.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax - b + b) = 0 + b = b.$$

„ \Leftarrow “ stačí druhá limita, nemusím znát $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax - b) = b - b = 0.$$

□

PŘÍKLAD 22: $f(x) = \sqrt{3x^2 + x}$

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3x^2 + x}}{x} = \sqrt{3} \quad (a = \sqrt{3})$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{3x^2 + x} - \sqrt{3}x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + x - 3x^2}{\sqrt{3x^2 + x} + \sqrt{3}x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\sqrt{3}} \quad (b = \frac{1}{2\sqrt{3}})$$

ZÁVĚR: f má v $+\infty$ asymptotu $\sqrt{3}x + \frac{1}{2\sqrt{3}}$.

DCV: $f(x) = \frac{x^{1+x}}{(1+x)^x}$; asymptoty v $+\infty$

VYŠETŘOVÁNÍ PRŮBĚHU FUNKCE.

1. D_f , obor spojitosti
2. průsečíky se souřadnými osami
3. symetrie (sudost, lichost, periodičita)
4. limity - i jednostranné - v krajních bodech D_f
5. $f'(x)$, intervaly monotonie, lokální a globální extrémy
6. $f''(x)$, intervaly konvexity a konkávity, inflexní body, H_f
7. f'_+, f'_- v bodech, kde neexistují f' !!!
8. asymptoty v $\pm\infty$
9. graf !!!

PŘÍKLAD 23: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$

$$\underline{1} \quad D_f : 1 + x^2 \neq 0$$

$$\frac{2x}{1+x^2} \in [-1; 1]$$

$$-1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1 \quad / \cdot (1+x^2)$$

$$2x \leq 1 + x^2$$

$$0 \leq (x-1)^2$$

$$\Rightarrow D_f = \mathbb{R}; f \text{ je spojitá na } \mathbb{R}$$

$$-1 - x^2 \leq 2x$$

$$0 \leq (x+1)^2$$

3 f lichá na \mathbb{R}

2 průsečíky $[0; 0]$

4 limity v krajních bodech - lichá, stačí v $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

5

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4x^2}{(x^2+1)^2}}} \cdot \frac{2(1+x^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{1+x^2} \cdot \frac{1-x^2}{|1-x^2|} = \frac{2}{1+x^2} \cdot \operatorname{sgn}(1-x^2) \text{ pro } x \neq \pm 1$$

VELMI OPATRNĚ S FUNKCÍ SGN !!!

$$x \in (-1; 1) \Rightarrow f'(x) > 0$$

$$x \in \mathbb{R} \setminus [-1; 1] \Rightarrow f'(x) < 0$$

Intervaly monotonie: $(-\infty; -1) f \searrow$

$(-1; 1) f \nearrow$

$(1; +\infty) f \searrow$

extrémy $f'(x) = \frac{2}{1+x^2} \cdot \frac{1-x^2}{|1-x^2|} \neq 0 \Rightarrow$ extrémy můžou být tam, kde není definována

\Rightarrow v 1 je lokální maximum, $f(1) = \frac{\pi}{2}$

\Rightarrow v -1 je lokální minimum, $f(-1) = \frac{-\pi}{2}$

\Rightarrow jsou zároveň globální, neboť $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$.

$$f'_+(1) = \begin{cases} z \text{ definice} \\ z \text{ věty: } f \text{ je spojitá na } (1; 1+\delta) \Rightarrow f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1+} f'(x) \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{2}{1+x^2} \cdot (-1) = -1$$

$$f'_+(1) = -1$$

$$\text{analogicky } \begin{cases} f_+(+1) = -1 \\ f'_-(+1) = +1 \\ f'_+(-1) = +1 \\ f_-(-1) = -1 \end{cases} \Rightarrow \text{derivace } f'(1), f'(-1) \text{ neexistuje !!!}$$

$$f'(x) = \frac{2}{1+x^2} \operatorname{sgn}(1-x^2), x \neq \pm 1 \text{ na } (-\infty; -1)$$

$$f'' = \left(\frac{-2}{1+x^2}\right)' = \frac{-2x \cdot (-2)}{(1+x^2)^2} = \frac{4x}{(1+x^2)^2} < 0$$

$$\text{na } (-1, 1) f'' = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}$$

$$\text{na } (1; +\infty) f'' = \frac{4x}{(1+x^2)^2}$$

intervaly konvexity: $f'' < 0$ na $(-\infty; -1) \dots \cap$

intervaly konvexity: $f'' > 0$ na $(1; +\infty) \dots \cup$

intervaly konvexity: $f'' > 0$ na $(-1; 0) \dots \cup$

intervaly konvexity: $f'' < 0$ na $(0; 1) \dots \cap$

Inflexní bod (musí být $f'' = 0$) \Rightarrow jediný kandidát $x = 0$: $f'' > 0$ na $(-1; 0)$ & $f'' < 0$ na $(0; 1)$ \Rightarrow nula je inflexní bod.

$H_f \left[\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$, neboť máme globální extrémy na \mathbb{R} (stačí spojitost f na $[-1; 1]$ & Darboux)

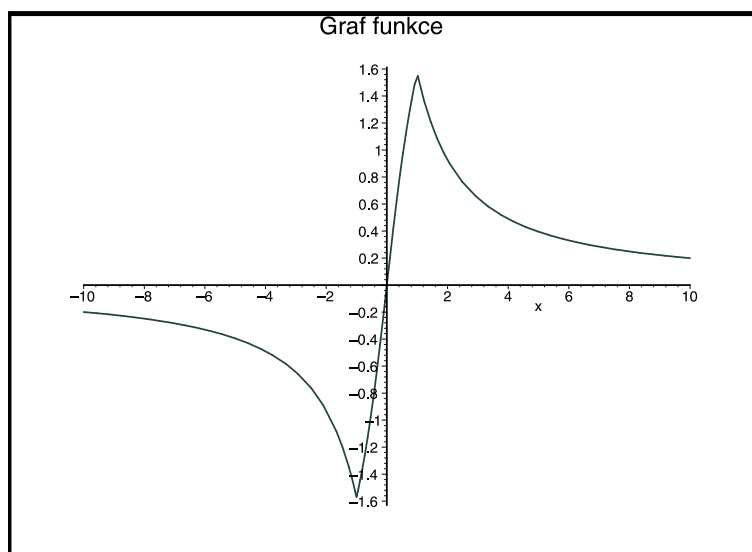
8 asymptota; funkce f je lichá \Rightarrow dělám jen v $+\infty$, v $-\infty$ je symetrická

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

f má v $\pm\infty$ asymptotu 0 (konstantní nulová funkce)

9 graf



2.10 Taylorův polynom.

POZNÁMKA 43: (i) lineární funkce $ax + b$ jsou polynomy 1. stupně $\Leftrightarrow a \neq 0$,

(ii) konstanty $f(x) = c$ jsou polynomy stupně 0,

(iii) $f(x) \equiv 0$ je polynom (stupeň 0, případně -1),

(iv) polynomy jsou spojité funkce na \mathbb{R} .

PŘÍKLAD 24: LINEÁRNÍ APROXIMACE

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - P(x)}{x - a} = 0?$$

Pokud existuje $f'(a)$ vlastní, pak $P(x) = t(x)$, kde $t(x)$ je tečna $f(a) + f'(a)(x - a)$, splňuje výše uvedenou rovnost.

CÍL: získat lepší aproximace

$$f(x) = 1 - \cos x$$

aproximace: $\frac{x^2}{2}$ je lepší než 0 $\rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^2} \dots$ aproximace 2. řádu

CHCEME: k funkci f , bodu a a číslu $n \in \mathbb{N}$ najít $P(x)$ tak, aby $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0$.

POZNÁMKA 44: $(x - a) \dots$ na okolí bodu a „velmi malé“

$(x - a)^2 \dots$ na okolí bodu a „mnohem menší“

$(x - a)^3 \dots$ na okolí bodu a „úplně mrňavé“

IDEA: $f(x) \sim a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \dots + a_n(x - a)^n$

POLOŽ $x = a$: f spojitá: $f(a) = a_0 \Rightarrow a_0 = f(a)$

derivuj $f'(x) = a_1 + 2a_2(x - a) + \dots + na_n(x - a)^{n-1}$

polož $x = 0$ $f'(a) = a_1 \Rightarrow a_1 = f'(a)$

⋮

$$a_2 = \frac{f''(a)}{2}$$

$$a_3 = \frac{f'''(a)}{6}$$

⋮

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

kolem 1670 - NEWTON

kolem 1700 - MACLAWRIN, TAYLOR

DEFINICE 66: Nechť f má na okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ vlastní $(n + 1)$ -ní derivaci. Pak polynom

$$T_n^a(f, x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

nazýváme TAYLOROVÝM POLYNOMEM STUPNĚ n FUNKCE f V BODĚ a .

POZNÁMKA 45: (i) Existence $(n + 1)$ -ní derivace není nezbytně nutná (stačí n -tá).

(ii) Někdy značíme jen $T_n(x)$. Toto značení používáme pouze v jasném případě, pokud nehrozí zmatek.

(iii) $T_n^a(f, x)$ je polynom stupně nejvýše n .

$$(iv) [T_n^a(f, x)]' = f'(a) + f''(a)(x - a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x - a)^{n-1}$$

$$[T_n^a(f, x)]' = T_{n-1}^a(f', x)$$

$$[T_n^a(f, x)]' = T_{n-1}^a(f', x)$$

$$[T_n^a(f, x)]'' = T_{n-2}^a(f'', x)$$

⋮

$$[T_n^a(f, x)]^{(n)} = f^n(a) = \text{konstanta}$$

další derivace jsou již nulové.

VĚTA 44: (O NEJLEPŠÍ APROXIMACI FUNKCE POLYNOMEM.) Nechť f je reálná funkce, $a \in \mathbb{R}$, $\exists f^{(n+1)}(a)$ vlastní. Nechť P je polynom stupně $\leq n$. Potom $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0 \Leftrightarrow P(x) = T_n^a(f, x)$.

DŮKAZ 44: „ \Leftarrow “ indukcí:

$$n = 1 \quad T_1^a(f, x) = t(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - t(x)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x-a} - f'(a) \right) = 0$$

$n - 1 \Rightarrow n \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T_n^a(f, x)}{(x-a)^n} = \text{L'H } \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - T_n^a(f, x)'}{n(x-a)^{n-1}} =$ (předchozí poznámka)
 iv) $= \lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x) - T_n^a(f, x)}{n(x-a)^{n-1}} = 0$ (indukční předpoklad).

„ \Rightarrow “ Nechť P je polynom, $\text{st}P \leq n$, nechť $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x) - T_n^a(f, x)}{(x-a)^n} = 0$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x) - f(x)}{(x-a)^n} + \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T_n^a(f, x)}{(x-a)^n} = 0$$

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x) - f(x)}{(x-a)^n} = 0 \dots$ předpoklad věty; $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T_n^a(f, x)}{(x-a)^n} = 0 \dots$ z právě dokázaného „ \Leftarrow “

Nyní stačí dokázat následující tvrzení:

TVRZENÍ: Q polynom, $\text{st}Q \leq n$, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n} = 0$, pak $Q \equiv 0$.

Důsledek: $P(x) - T_n^a(f, x) = 0$, tedy $P(x) \equiv T_n^a(f, x)$

Takže V44 bude dokázána, jakmile dokážeme tvrzení:

indukcí: $n = 1$ Q lineární funkce, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n} = 0$, pak $Q \equiv 0$.

\rightarrow polynomy jsou spojité $\Rightarrow Q(a) = 0$

Potom Q je nutně tvaru $Q(x) = C(x-a)$, kde $C \in \mathbb{R}$.

Dosadíme:

$$\text{Tedy } 0 = \lim_{x \rightarrow a} \frac{Q(x)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{c(x-a)}{x-a} = C.$$

Tedy $c = 0$, tudíž $Q \equiv 0$.

$n - 1 \Rightarrow n$

Nechť $\text{st}Q \leq n$, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n} = 0$.

Potom nutně $Q(a) = 0$. Tedy a je kořen Q , takže $(x-a)$ je faktorem Q , to jest:

$\exists R(x) \dots$ polynom stupně $\leq n-1$ tak, že

$$Q(x) = R(x)(x-a).$$

$$\text{Tedy } 0 = \lim_{x \rightarrow a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{R(x)}{(x-a)^{n-1}}.$$

Podle indukčních předpokladů $R \equiv 0$ a tedy také: $Q(x) = R(x)(x-a) \equiv 0$

□

VĚTA 45: (OBEČNÝ TVAR ZBYTKU.) Nechť f je reálná funkce, $a \in \mathbb{R}$. Nechť existuje $f^{(n+1)}$ vlastní na $\mathcal{P}_{(a)}^\delta$, $\delta > 0$. Nechť $x \in \mathcal{P}_{(a)}^\delta$. Nechť P je funkce spojitá na $[a; x]$, která má v každém bodě $y \in (a; x)$ vlastní nenulovou derivaci. Pak $\exists \xi \in (a; x)$ tak, že

$$R_n^a(f, x) := f(x) - T_n^a(f, x) = \frac{1}{n!} \cdot \frac{\phi(x) - \phi(a)}{\phi'(\xi)} \cdot f^{(n+1)}(\xi) \cdot (x - \xi)^n.$$

DŮKAZ 45: $t \in [a; x]$, definujeme $F(t)$ předpisem:

$$F(t) := f(x) - T_n^t(f, x) = f(x) - \left(f(t) + f'(t)(x-t) + \dots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n \right)$$

Potom:

- F je spojitá na $[a; x]$. (neboť existuje $f^{(n+1)}$ vlastní)
- $F(x) = 0$
- $F(a) = R_n^a(f, x)$

Cauchyova věta $\Rightarrow \exists \xi \in (a; x) : \frac{F(x)-F(a)}{\phi(x)-\phi(a)} = \frac{F'(\xi)}{\phi'(\xi)} \Rightarrow$

$$(F(x) = 0; F(a) = R)$$

$$\Rightarrow F(a) = -F'(\xi) \cdot \frac{\phi(x)-\phi(a)}{\phi'(\xi)} = R_n^a(f, x)$$

Zbývá ověřit, že $-F'(\xi) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x - \xi)^n$.

derivace dle t :

$$-F'(\xi) = [-f'(t) + f'(t) - f''(t)(x-t) + f''(t)(x-t) + \dots$$

(všechno se sežere, až na poslední člen:) $\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n]_{t=\xi}$

$$= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x - \xi)^n.$$

□

VĚTA 46: (LAGRANGEŮV TVAR ZBYTKU.) Za předpokladů V45 existuje

$$R_n^a(f, x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}.$$

DŮKAZ 46: Polož $\phi(t) = (x-t)^{n+1}$ ve V45.

□

VĚTA 47: (CAUCHYŮV TVAR ZBYTKU.) Za předpokladů V45 $\exists \xi \in (a; x)$ tak, že

$$R_n^a = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n(x-a).$$

DŮKAZ 47: Polož $\phi(t) = t$ ve V45.

□

POZNÁMKA 46: Věta 45 platí i pro $x < a \Rightarrow [a; x] \sim [x; a]$. $(a; x) \sim (x; a)$.

APLIKACE A PŘÍKLADY. (Taylorův polynom a odhady zbytku.)

$$f \rightarrow T_n^a(f, x) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(a)}{j!} (x - a)^j$$

PŘÍKLAD 25: FUNKCE $\exp x$

$$f(x) = e^x \quad f^{(n)} = e^x \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow T_n^0(\exp, x) = \sum_{j=0}^n \frac{x^j}{j!} \quad (\text{neboť } f^{(n)}(0) = 1)$$

Tedy $e^x = \sum_{j=0}^n \frac{x^j}{j!} + R_n^0(\exp, x) = \text{Lagrangeův tvar} = \sum_{j=0}^n \frac{x^j}{j!} + \frac{1}{(n+1)!} e^{\xi_n} x^{n+1}$ (odhad závisí na $n!!!$)

$$(\forall x \in \mathbb{R}, \text{ pro nějaké } \xi_n \in (0; x), \text{ resp. } (x; 0)) \quad |\xi_n| \leq |x|$$

$$(\text{Lagrangeův tvar}) = \sum_{j=0}^n \frac{x^j}{j!} + \frac{1}{(n+1)!} e^{|\xi_n|} |x|^{n+1}$$

ODHAD ZBYTKU:

$$|R_n^0(\exp, x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} e^{|\xi_n|} |x|^{n+1} \quad R_n^0(\exp, x) > 0 \text{ pro } x > 0$$

NAPŘ. PRO $x = 1$ (aproximace čísla e): $\sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} < e < \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} + \frac{e}{(n+1)!} < \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} + \frac{4}{(n+1)!}$

$$(\text{z Bernoulliho nerovnosti:}) \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \Rightarrow e < 4$$

SPOČÍTÁME e S LIBOVOLNOU PŘESNOSTÍ, např. 0,001: stačí najít n tak, aby

$$\frac{4}{(n+1)!} < 0,001, \text{ tj. } n = 6$$

$$6! = 720; 7! = 5040 \Rightarrow e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} \text{ s přesností } \frac{1}{1000}.$$

DŮKAZ IRACIONALITY ČÍSLA e :

Nechť $e = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, pak

$$\sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} < \frac{p}{q} < \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} + \frac{4}{(n+1)!} \quad \forall n \in \mathbb{N} / \cdot q \cdot n!$$

Označme $m = q \cdot n! \cdot \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} \in \mathbb{Z} \Rightarrow m < p \cdot n! < m + \frac{4q}{n+1}$ $n \in \mathbb{N}$

$m \in \mathbb{Z}, p \cdot n! \in \mathbb{Z}, m + \frac{4q}{n+1} < 1$; pro $n > 4q - 1$

PŘÍKLAD 26: FUNKCE $\sin x$, $a = 0$

$$\begin{array}{llll} f(x) = \sin x & f(0) = 0 & a_0 = 0 & \\ f'(x) = \cos x & f'(0) = 1 & a_1 = 1 & T_1^0(\sin, x) = x \\ f''(x) = -\sin x & f''(0) = 0 & a_2 = 0 & T_2^0(\sin, x) = x \\ f'''(x) = -\cos x & f'''(0) = -1 & a_3 = \frac{-1}{6} & T_3^0(\sin, x) = x - \frac{x^3}{6} \\ f^{(4)}(x) = \sin x & f^{(4)}(0) = 0 & a_4 = 0 & T_3^0(\sin, x) = x - \frac{x^3}{6} \end{array}$$

dále periodicky (4)

$$\Rightarrow T_{2n}^0(\sin, x) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \cdot \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!} = T_{2n-1}^0(\sin, x)$$

$$\Rightarrow \sin x = \sum_{j=0}^n (-1)^j \cdot \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!} + \frac{1}{(2n+2)!} \cdot \sin^{2n+2}(\xi_n) \cdot x^{2n+2}$$

$$\text{ODHAD ZBYTKU: } |R_{2n+1}^0(\sin, x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

Můžeme aproximovat $\sin 1$, dokázat $\sin 1 \notin \mathbb{Q}$ apod.

PŘÍKLAD 27: DALŠÍ TAYLOROVY ROZVOJE

$$\underline{f(x) = \cos x} \quad T_{2n}^0(\cos, x) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots$$

$$\underline{f(x) = \log(1+x)} \quad T_n^0(f, x) = \sum_{j=0}^n (-1)^{j+1} \frac{x^j}{j} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{3} \dots$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \log^2$$

$$\underline{f(x) = \operatorname{arctg} x} \quad T_n^0(\operatorname{arctg}, x) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \dots$$

$$x = 1 : \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Landauovy symboly (O, o) - určení „rychlosti konvergence“, „řádu aproximace“

DEFINICE 67: Funkce f, g jsou definovány na $\mathcal{P}_{+(a)}^\delta$, $a \in \mathbb{R}^*$, $\delta > 0$. Řekneme, že $f = O(g)$, pro $x \rightarrow a_+$, jestliže $\limsup_{x \rightarrow a_+} \frac{f(x)}{g(x)} < \infty$ (f je na pravém okolí bodu a srovnatelné s funkcí g).

Řekneme, že $f = o(g)$, pro $x \rightarrow a_+$, jestliže $\limsup_{x \rightarrow a_+} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ (f je na pravém okolí bodu a zanedbatelné k g).

PŘÍKLAD 28: $\sin x = O(x)$, $x \rightarrow 0$

$\sin x = o(\sqrt{x})$, $x \rightarrow 0$ apod.

POZNÁMKA 47: (i) $f = o(g) \Rightarrow f = O(g)$ (\Leftarrow neplatí)

(ii) nejčastější použití: odhad „malých veličin“ na okolí bodu a

$a \in \mathbb{R}$: $|x - a| \dots$ malá veličina

$a \in \mathbb{R}$: $|x - a|^2 \dots$ velmi malá veličina

$a \in \mathbb{R}$: $|x - a|^3 \dots$ úplně mrňavá veličina

„odhad“ je obvykle srovnání s $|x - a|^\alpha$, $a \in \mathbb{R}$, nebo s $|x|^\alpha$, pokud $a = +\infty$

příklady:

$a = 0$: $1 - \cos x = O(x^2)$ $x \rightarrow 0$

$a = 1$: $\ln x = O(x - 1)$ $x \rightarrow 1$

$a = +\infty$: $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x = O\left(\frac{1}{x}\right)$ $x \rightarrow +\infty$ (L'H)

nebo

z odhadu Taylorova zbytku:

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)$, $x \rightarrow 0$

nebo

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$,

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + x + \frac{x^3}{3!} + O(x^4)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + O(x^4) - \left(1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - O(x^4)\right) - 2x}{x - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{3} + O(x^4)}{\frac{x^3}{6} + o(x^4)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3} + O(x)}{\frac{1}{6} + o(x)} = 2$$

(v) POZOR na zvláštní aritmetiku Landauových symbolů:

- $O(x^\alpha) \pm O(x^\alpha) \neq 0$
- $O(x^\alpha) \pm O(x^\beta) = O(x^\gamma)$, kde $\gamma = \begin{cases} \max\{\alpha, \beta\}, & x \rightarrow \pm\infty \\ \min\{\alpha, \beta\}, & x \rightarrow 0 \end{cases}$
- $x^\alpha O(x^\beta) = O(x^{\alpha+\beta})$

→ všude lze psát $|x - a|$ místo x

Kapitola 3

Integrace reálných funkcí.

3.1 Primitivní funkce.

DEFINICE 68: Necht' funkce f, F jsou definovány na $(a; b)$, $a, b \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že F je PRIMITIVNÍ FUNKCÍ K FUNKCI f , jestliže $F'(x)$ existuje $\forall x \in (a; b)$ a $F'(x) = f(x)$.

PŘÍKLAD 29: e^x je primitivní k e^x , ale také k $e^x + 1$

VĚTA 48: (O JEDNOZNAČNOSTI PRIMITIVNÍ FUNKCE AŽ NA KONSTANTU.) Necht' F, G jsou primitivní funkce k f na $(a; b)$. Pak existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$ tak, že $F(x) - G(x) = c$ $\forall x \in (a; b)$.

DŮKAZ 48: Položme $H(x) = F(x) - G(x)$. Potom $H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$.

Necht' H není konstantní na $(a; b)$, pak $\exists x_1, x_2 : x_1 < x_2, H(x_1) \neq H(x_2)$. H je spojitá na $(a; b)$ (má vlastní derivaci), a tedy i na $[x_1; x_2] \Rightarrow$ Lagrangeova věta.

$\exists \xi \in (x_1; x_2)$ tak, že $H'(\xi) = \frac{H(x_2) - H(x_1)}{x_2 - x_1} \neq 0$ SPOR, neboť $H' \equiv 0$.

□

POZNÁMKA 48: (i) F f na $(a; b)$

$\Rightarrow F$ je spojitá na $(a; b)$ (má vlastní derivaci)

(ii) f je spojitá na $(a; b)$,

$\Rightarrow f$ má primitivní funkci na $(a; b)$

(iii)

PŘÍKLAD 30: $f(x) = \operatorname{sgn} x, x \in (-1; 1) \dots$ nemá primitivní funkci

(iv)

PŘÍKLAD 31: $F(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin(\frac{1}{x^2}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

F má derivaci \mathbb{R} , $f = F'$, ale f není spojitá v 0

POZNÁMKA 49: Darbouxovská vlastnost \Rightarrow primitivní funkce existuje.

VĚTA 49: (NUTNÁ PODMÍNKA EXISTENCE PRIMITIVNÍ FUNKCE.) Necht' f má na $(a; b)$ primitivní funkci. Potom f na $(a; b)$ má Darbouxovu vlastnost (tj. nabývá všech mezihodnot): $\forall x_1, x_2 : f(x_1) < f(x_2) \forall y \in (f(x_1); f(x_2)) \exists \xi \in (x_1; x_2)$ nebo $x \in (x_2; x_1)$ tak, že $f(x) = y$.

DŮKAZ 49: BÚNO $x_1 < x_2$. Necht' $F' = f$ na $(a; b)$.

TRIK: Definuji $H(x) = F(x) - y \cdot x, x \in (a; b)$.

Pak $H'(x) = f(x) - y$.

H je spojitá na $(a; b) \Rightarrow$ také na $[x_1; x_2]$.

Tedy nabývá svého minima na $[x_1; x_2]$.

$H'(x_1) = f(x_1) - y < 0 \Rightarrow$ není min

$H'(x_2) = f(x_2) - y > 0 \Rightarrow$ není min

$\Rightarrow \min_{[x_1; x_2]} H$ se nenabývá v krajních bodech

$\exists x \in (x_1; x_2)$, kde H nenabývá minima

$H'(x) = 0 \Rightarrow f(x) = y$.

□

POZNÁMKA 50: f spojitá $\Rightarrow f$ má primitivní funkci $\Rightarrow f$ darbouxovská („ \Leftarrow “ neplatí)

TABULKOVÉ INTEGRÁLY.

Značení: $\int f(x)dx$,

kde $\int \dots$ „fajka bez mezí“ (neurčitý integrál)

$f(x)$... integrand

dx ... Leibnitzův diferenciál

$\int f(x)dx$ je množina všech primitivních funkcí k f , píšeme: $\int f(x)dx = F(x) + c$

POZNÁMKA 51: Intervaly jsou zásadní součástí odpovědi!!!

$f(x)$	$\int f(x)dx$	podmínky
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, x \in (0; +\infty)$
$\frac{1}{x}$	$\log x + C$	$x \neq 0$
e^x	$e^x + C$	$x \in \mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x + C$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x + C$	$x \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$	$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$
$\frac{-1}{\sin^2 x}$	$\operatorname{cotg} x + C$	$x \in (k\pi; \pi + k\pi), k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x + C$	$x \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arcsin} x + C$	$x \in (-1; 1)$
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arccos} x + C$	$x \in (-1; 1)$
$\frac{-1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\log(x + \sqrt{x^2 + 1}) + C$... $\operatorname{argsinh} x$	$x \in \mathbb{R}$

VĚTA 50: (O SUBSTITUCI.) (i) Nechť F je primitivní funkce k f na $(a; b)$. Nechť ϕ je definována na $(\alpha; \beta)$ s hodnotami v $(a; b)$. Nechť má ϕ na $(\alpha; \beta)$ vlastní derivaci. Potom platí

$$\int f(\phi(t)) \cdot \phi'(t) dt = F(\phi(t)) + C, \quad t \in (\alpha; \beta)$$

(ii) Nechť ϕ je definována na $(\alpha; \beta)$ a má všude na $(\alpha; \beta)$ vlastní a nenulovou derivaci. Nechť $\phi(\alpha; \beta) = (a; b)$. Nechť f je definována na $(a; b)$ a nechť

$$\int f(\phi(t)) \cdot \phi'(t) dt = G(t) + C, \quad t \in (\alpha; \beta).$$

Potom

$$\int f(x) dx = G(\phi^{-1}(x)) + C, \quad x \in (a; b).$$

DŮKAZ 50: (i): $(F \circ \phi)'(t) = F'(\phi(t)) \cdot \phi'(t) = f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)$.

(ii) Nejprve si uvědomíme, že ϕ je na $(\alpha; \beta)$ RYZE MONOTÓNÍ (všude vlastní nenulová derivace $\Rightarrow \phi'$ má primitivní funkci, a tedy je darbouxovská \Rightarrow nenabývá nuly, a tedy nemění znaménko na $(\alpha; \beta)$, jinak by musela být někde nulová) \Rightarrow LZE UŽÍT VĚTU O DERIVACI INVERZNÍ FUNKCE

ϕ rzye monotónní \Rightarrow dle věty o derivaci inverzní funkce

$$[G(\phi^{-1}(x))]' = f(\phi(\phi^{-1}(x))) \cdot \phi'(\phi^{-1}(x)) \cdot [\phi^{-1}(x)]$$

$$= f(\phi(\phi^{-1}(x))) \cdot \phi(\phi^{-1}(x)) \cdot \frac{1}{\phi'(\phi^{-1}(x))} = f(x)$$

□

PŘÍKLAD 32: TYP (I) („VIDÍM DERIVACI“)

$$\int (\log x)^2 \frac{dx}{x} = \frac{(\log x)^3}{3} + C, \quad x \in (0; +\infty)$$

$$y = \log x$$

$$dy = \frac{dx}{x} \quad \int = \int y^2 dy = \frac{y^3}{3} + C$$

? ϕ , $(\alpha; \beta)$? ...

TYP (I) („VYROBÍM DERIVACI“)

$$\int \cos(3x + 4) dx$$

$$= \frac{1}{3} \int \cos(3x + 4) \cdot 3 dx = \frac{1}{3} \sin(3x + 4) + C$$

$$y = 3x + 4$$

$$dy = 3 dx \quad \int = \frac{1}{3} \int \cos y dy \text{ atd.}$$

POZNÁMKA 52: (i) linearita primitivní funkce:

f, g mají primitivní funkce F, G na $(a; b)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\int (\alpha f + \beta g) dx = \alpha F(x) + \beta G(x) + C$$

(obecný tvar předchozího příkladu)

Nechť $\int f(x) dx = F(x) + C$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, pak

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C$$

PŘÍKLAD 33: TYP (II)

$$\int \sqrt{1 - x^2} dx, \quad x \in (-1; 1)$$

$$\text{Volím } x = \sin t, \quad \phi(t) = \sin t, \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$dx = \cos t dt, \quad \phi'(t) = \cos t \neq 0, \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$t = \phi^{-1}(x) = \arcsin x, \quad x \in (-1; 1)$$

$$\int \sqrt{1 - x^2} dx = \int \sqrt{1 - \phi^2(t)} \phi'(t) dt = \int \sqrt{1 - \sin^2(t)} \cos(t) dt$$

$$= \int \sqrt{\cos^2 t} \cos t dt = \int |\cos t| \cos t dt = \{\cos t > 0\} = \int \cos^2 t dt = \{ \text{TRIK} \} =$$

$$\int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin(2t) + C = \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{4} (2 \arcsin x) + C$$

VĚTA 51: (O INTEGRACI PER PARTES.) Nechť f, g jsou spojité na $(a; b)$. Nechť $F' = f$, $G' = g$. Potom

$$\int f(x)G(x)dx = F(x)G(x) - \int F(x)g(x)dx.$$

DŮKAZ 51: $[F(x)G(x)]' = F'(x)G(x) + F(x)G'(x) = f(x)G(x) + F(x)g(x).$

$$\text{Tedy } \int (f(x)G(x) + F(x)g(x)) dx = F(x)G(x) + C$$

$$\text{tj. } \int f(x)G(x)dx = F(x)G(x) - \int F(x)g(x)dx$$

□

$$\text{PŘÍKLAD 34: } I = \int e^x \sin x dx \left| \begin{array}{l} F(x) = e^x \quad f(x) = e^x \\ g(x) = \sin x \quad G(x) = -\cos x \end{array} \right| =$$

$$-e^x \cos x + \int e^x \cos x dx \left| \begin{array}{l} F(x) = e^x \quad f(x) = e^x \\ g(x) = \cos x \quad G(x) = \sin x \end{array} \right| =$$

$$= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$$

$$\Rightarrow I = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2}$$

$$\int e^x \sin x dx = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2} + C$$

PŘÍKLAD 35: „integrace tajných součinů“

$$\int \log x dx = \int 1 \cdot \log x dx = x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \log x - x = x(\log x - 1) + C$$

$$\text{PŘÍKLAD 36: } I_n = \int \frac{1}{(x^2+1)^n} dx = \int 1 \cdot \frac{1}{(x^2+1)^n} dx \left| \begin{array}{l} F(x) = \frac{1}{(x^2+1)^n} \quad f(x) = \frac{(-n)2x}{(x^2+1)^{n+1}} \\ g(x) = 1 \quad G(x) = x \end{array} \right| =$$

$$= \frac{x}{(x^2+1)^n} + n \int \frac{2x^2}{(x^2+1)^{n+1}} dx =$$

$$= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n \int \frac{1+x^2-1}{(1+x^2)^{n+1}} dx =$$

$$= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2nI_n - 2nI_{n+1}$$

$$I_{n+1} = \frac{x}{(x^2+1)^n} \cdot \frac{1}{2n} + \frac{2n-1}{2n} \cdot I_n$$

rekurentní formule

$$I_1 = \text{arctg } x + C$$

$$I_2 = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C$$

atd.

INTEGRACE RACIONÁLNÍCH FUNKCÍ

$P, Q \dots$ polynomy na \mathbb{R} , $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \dots$ racionální funkce $\{\int \frac{x^2+3x+2}{x^3-x^2-1} dx\}$

1. KROK potřebujeme zařídit, aby $\operatorname{st}P < \operatorname{st}Q$, pokud tomu tak není, dělíme mnohočleny

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int P_1(x) dx + \int \frac{P_2(x)}{Q(x)} dx, \operatorname{st}P_2 < \operatorname{st}Q \dots$$

2. KROK rozklad na parciální zlomky $\frac{P_2(x)}{Q(x)}$, $\operatorname{st}P_2 < \operatorname{st}Q$

$Q(x)$ lze rozložit na součin konečně mnoha lineárních faktorů $\{(x-a_i)_{i=1,\dots,s}^{k_i}\}$ a konečně mnoha ireducibilních (nerozložitelných) $(x^2 + \alpha_j x + \beta_j)_{j=1,\dots,r}$.

$$Q(x) = (x - a_1)^{k_1} \dots (x - a_s)^{k_s} (x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{l_1} \dots (x^2 + \alpha_r x + \beta_r)^{l_r},$$

$$r, s, k_1, \dots, k_s, l_1, \dots, l_r \in \mathbb{N}$$

$$a_i, \alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$$

(poznámka: horní index neznačí mocninu, ale index) $A_1^1, \dots, A_{k_1}^1, A_1^2, \dots, A_{k_s}^2, B_1^1, C_1^1, \dots, B_{l_1}^1, C_{l_1}^1, \dots, B_1^r, C_1^r, B_{l_r}^r, C_{l_r}^r$ tak, že

$$\begin{aligned} \frac{P_2(x)}{Q(x)} &= \frac{A_1^1}{x-a_1} + \frac{A_2^1}{(x-a_1)^2} + \dots + \frac{A_{k_1}^1}{(x-a_1)^{k_1}} + \frac{A_{k_s}^1}{(x-a_s)^{k_s}} + \dots + \\ &+ \frac{B_{l_1}^1 x + C_{l_1}^1}{x^2 + \alpha_1 x + \beta_1} + \dots + \frac{B_{l_1}^1 x + C_{l_1}^1}{(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{l_1}} + \dots + \frac{B_{l_r}^r x + C_{l_r}^r}{(x^2 + \alpha_r x + \beta_r)^{l_r}} \end{aligned}$$

(VĚTA Z ALGEBRY)

Jak najít čísla A, B, C, \dots ?

$$A) \frac{P_2(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a} + \dots + \frac{Bx+C}{x^2+\alpha x+\beta} + \dots / \dots Q(x)$$

$\Rightarrow P_2(x) = \dots$ porovnáváme koeficienty u všech mocnin

vyjde soustava lineárních rovnic $\begin{cases} 1 \dots \\ x \dots \\ x^2 \dots \end{cases}$

B) pro lineární faktory: „cover-up rule“ (zakrývající pravidlo)

$$\frac{P_2(x)}{Q(x)} = \frac{P_2(x)}{(x-a)Q_1(x)} = \frac{A}{x-a} + \dots,$$

potom $A = \frac{P_2(A)}{Q_1(A)}$

POZOR!!! Lze provádět pouze pro nejvyšší mocniny $(x-a)^n$!

3. KROK integrace parciálních zlomků $\int \frac{A}{(x-a)^n} dx = \begin{cases}$

$$\int \frac{A}{(x-a)^n} dx = \begin{cases} \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C, n > 1 \\ A = \log|x-a| + C, n = 1 \end{cases}; \begin{cases} x \in (-\infty, a) \\ x \in (a; +\infty) \end{cases}$$

* $\int \frac{Bx+C}{(x^2+\alpha x+\beta)^n} dx$ víme: $\alpha^2 - 4\beta < 0$, $\beta - \frac{\alpha^2}{4} > 0$

„vidím derivaci“

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+\alpha x+\beta)^n} dx = \frac{B}{2} \int \frac{2x+\alpha}{(x^2+\alpha x+\beta)^n} dx + (C - \frac{B\alpha}{2}) \int \frac{dx}{(x^2+\alpha x+\beta)^n} =$$

$$= I_1 + I_2;$$

$$I_1 = \frac{B}{2} \log(x^2 + \alpha x + \beta)^{n-1}, x \in \mathbb{R}$$

$$= \frac{B}{2} \frac{1}{(1-n)(x^2+\alpha x+\beta)^{n-1}}, x \in \mathbb{R}$$

$$* \int \frac{dx}{(x^2+\alpha x+\beta)^n} = \int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(\beta - \frac{\alpha^2}{4}\right)\right]^n} =$$

substituce $y = x + \frac{\alpha}{2}$, $dy = dx$, označ $a^2 = \beta - \frac{\alpha^2}{4} > 0$

$$= \int \frac{dy}{(y^2+a^2)^n} = \frac{a}{a^{2n}} \frac{dz}{(z^2+1)^n} \text{ umíme.}$$

substituce $z = \frac{y}{a}$, $dz = \frac{dy}{a}$

PŘÍKLAD 37: $I = \int \frac{x^2+1}{(x+1)(x^2+x+1)} dx$

1. KROK: $\text{st}P = 2$; $\text{st}Q = 3$; $2 < 3 \Rightarrow \text{OK}$

2. KROK: $\frac{x^2+1}{(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} =$

cover-up: $A = \frac{2}{1} = 2 \quad = \int \frac{2}{x+1} dx + \int \frac{Bx+C}{x^2+x+1} dx$

$$x^2 + 1 = 2(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x + 1) = x^2(2 + B) + x(2 + B + C) + 2 + C$$

$$\begin{cases} x^2 : 1 = 2 + B \\ x : 0 = 2 + B + C \\ 1 : 2 + C = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = -1 \\ C = -1 \end{cases}$$

3. KROK: $I = \int \frac{2}{x+1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+x+1} dx =$

$$= 2 \ln|x+1| - \frac{1}{2} \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+x+1} =$$

$$= 2 \ln|x+1| - \frac{1}{2} \log(x^2+x+1) - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \Big|_{\text{substituce } y=x+\frac{1}{2}; dy=\frac{dx}{2}} =$$

$$= \log\left(\frac{(x+1)^2}{\sqrt{x^2+x+1}}\right) - \frac{a}{2} \int \frac{dy}{y^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$$

$$= \log\left(\frac{(x+1)^2}{\sqrt{x^2+x+1}}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C, \quad x \in (-\infty; -1)$$

$$x \in (-1; -\infty)$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctg\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

INTEGRACE IRACIONÁLNÍCH FUNKCÍ substituce \rightarrow převést na racionální

INTEGRACE TRIGONOMETRICKÝCH FUNKCÍ A LEPENÍ

Polynom dvou proměnných: $P(x, y) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x^i y^j, a_{ij} \in \mathbb{R}$

P, Q : dva polynomy 2 proměnných

$$R(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

Chceme integrovat $\int R(\sin x, \cos x) dx$

VHODNÉ SUBSTITUCE:

- (i) $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, $x \in (-\pi, \pi)$, $t \in \mathbb{R} \dots$ univerzální substituce
- (ii) $t = \sin x$, pokud funkce $R(x, -y) = -R(x, y)$ (R je „lichá v cosinech“)
- (iii) $t = \cos x$, pokud funkce $R(-x, y) = -R(x, y)$ (R je „lichá v sinech“)
- (iv) $t = \operatorname{tg} x$, pokud funkce $R(-x, -y) = R(x, y)$ (R je „sudá v obou parametrech“)

POZNÁMKA 53: (i) Substituce (i) funguje vždy (vždy převede na racionální funkci), ale používáme ji jen pokud nelze použít (ii) - (iv).

(ii) Substituce (i) funguje pouze pro x in $(-\pi, \pi)$, respektive na libovolném intervalu tvaru $x \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, musíme proto výslednou primitivní funkci „dolepit“. (Ukážeme na příkladu.)

PŘÍKLAD 38: $I = \int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$

$$R(x, y) = \frac{1}{1+y^2} \dots \text{sudá, užijeme substituce (iv) } t = \operatorname{tg} x, t \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$1 + t^2 = 1 + (\operatorname{tg} x)^2 = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\Rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}$$

$$x = \operatorname{arctg} t \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

$$I = \int \frac{1}{1+\frac{t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{1+2t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \operatorname{arctg}(\sqrt{2}t) + C_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} + \operatorname{tg} x) + C_0,$$

$x \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\text{Stejná substituce } \Rightarrow I = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) + C_k, x \in \left(\frac{-\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{1+\sin^2 x} \text{ spojitá na } \mathbb{R}$$

\Rightarrow má primitivní funkci na \mathbb{R} , tato primitivní funkce je spojitá na \mathbb{R} .

Vyrobím jednu z primitivních funkcí na \mathbb{R} : Zvolím $C_0 = 0$.

$$F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) + C_k, x \in \left(\frac{-\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$$

$$\frac{\pi}{2} : \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} F_0(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} F_0(x) = \frac{-\pi}{2\sqrt{2}} + C_1$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} - \left(-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}, \text{ analogicky } C_k = \frac{k\pi}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) + \frac{k\pi}{\sqrt{2}}, x \in \left(\frac{-\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{k\pi}{\sqrt{2}}, x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{1+\sin^2 x} + C, C \in \mathbb{R}, x \in (-\infty, \infty)$$

INTEGRACE FUNKCÍ OBSAHUJÍCÍCH ODMOCNINY.

$$\int R\left(\sqrt[q]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx, q \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad \neq bc$$

$$\text{substituce } t = \sqrt[q]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \text{ pak } x = \frac{d \cdot t^q - b}{a - c \cdot t^q} \text{ atd.}$$

$$dx = \dots$$

PŘÍKLAD 39: $I = \int \frac{\sqrt{2x+3+x}}{\sqrt{2x+3-x}} dx$

$$\text{pro } x \geq \frac{-3}{2} \text{ \& } \sqrt{2x+3} \neq x$$

$$\Rightarrow x \in \left(-\frac{3}{2}, 3\right) \text{ nebo } x \in (3, \infty)$$

$$\text{substituce: } t = \sqrt{2x+3}, x = \frac{t^2-3}{2}, dx = t dt$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{t + \frac{t^2-3}{2}}{t - \frac{t^2-3}{2}} dt$$

$$= \int \frac{t^3 + 2t^2 - 3t}{-t^2 + 2t - 3} dt \text{ atd.}$$

INTEGRACE FUNKCÍ OBSAHUJÍCÍCH VÝRAZ $\sqrt{ax^2 + bx + c}$, $a \neq 0$.

EULEROVY SUBSTITUCE

(i) pokud $ax^2 + bx + c$ má jeden dvojnásobný kořen α

$$\Rightarrow a > 0 \Rightarrow \sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}|x - \alpha| \text{ atd.}$$

(ii) pokud $ax^2 + bx + c$ má dva různé kořeny α_1, α_2 , $\alpha_1 < \alpha_2$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)}$$

$$\underline{a > 0} \Rightarrow x \in (-\infty, \alpha_1) \text{ nebo } x \in (\alpha_2, +\infty)$$

$$\sqrt{a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)} = \sqrt{a}|x - \alpha_1| \cdot \sqrt{\frac{x - \alpha_2}{x - \alpha_1}}, \text{ předchozí případ}$$

$$\underline{a < 0} \quad x \in (\alpha_1, \alpha_2) \Rightarrow \sqrt{a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)} = \sqrt{-a}(x - \alpha_1)\sqrt{\frac{\alpha_2 - x}{x - \alpha_1}} \text{ atd.}$$

(iii) $ax^2 + bx + c$ nemá kořeny $\Rightarrow a > 0$

$$\underline{\text{Euler:}} \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{ax + t} / 2$$

$$\Rightarrow ax^2 + bx + c = ax^2 + 2\sqrt{a}x + t^2$$

$$\Rightarrow x = \frac{t^2 - c}{b - 2\sqrt{2}t}$$

$$dx = \dots \text{ atd.}$$

PŘÍKLAD 40: $I = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, +\infty)$

$$\underline{\text{Euler:}} \quad \sqrt{x^2 + 1} = x + t / 2$$

$$x^2 + 1 = x^2 + 2xt + t^2$$

$$1 = 2xt + t^2$$

$$x = \frac{-t^2+1}{2t} = \frac{1-t^2}{2t} = \frac{1}{2t} - \frac{t}{2}$$

$$dx = \left(\frac{1}{2t^2} - \frac{1}{2}\right) dt$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{1}{\left(\frac{t^2-1}{2t}\right)^2 \left(t - \frac{t^2-1}{2t}\right)} \cdot \left(-\frac{1}{2t^2} - \frac{1}{2}\right) dt$$

$$= \dots = \int \frac{-4t}{(1-t^2)^2} dt \text{ atd.}$$

POZNÁMKA 54: f spojitá na (a, b)

$\Rightarrow \exists F, F' = f$ na (a, b)

Tato F ovšem nemusí být vyjádřitelná elementárními funkcemi.

PŘÍKLAD 41: (i) e^{-x^2} spojitá na \mathbb{R}

$$\int e^{-x^2} dx = \operatorname{erf}(x) \text{ \{error function\}}$$

(ii) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ spojitá na \mathbb{R}

$\int \frac{\sin x}{x} dx$ nelze vyjádřit

(iii) $\frac{\operatorname{arctg} x}{x}, \frac{1}{\ln x}$

$$\operatorname{Li}(x) = \int \frac{dx}{\log x}$$

$(0, 1), (1, +\infty) \dots$

3.2 Riemannův integrál.

DEFINICE 69: Řekneme, že $D = \{x_j\}_{j=0}^n$ je DĚLENÍ INTERVALU $[a; b]$, jestliže $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

Řekneme, že D' ZJEMŇUJE D , jestliže $x_j \Rightarrow x_j \in D'$.

DEFINICE 70: Necht' $[a; b] \subset \mathbb{R}$, D dělení $[a; b]$. Pak DOLNÍM (HORNÍM) RIEMANNOVÝM SOUČTEM funkce f přes $[a; b]$ vzhledem k D označujeme

$$s(f, D) = \sum_{j=1}^n \left(\inf_{x \in [x_{j-1}; x_j]} f(x) \right) \cdot (x_j - x_{j-1}) \quad (\text{dolní})$$

$$S(f, D) = \sum_{j=1}^n \left(\sup_{x \in [x_{j-1}; x_j]} f(x) \right) \cdot (x_j - x_{j-1}) \quad (\text{horní})$$

DEFINICE 71: Číslo

$$(R) \int_a^b f(x) dx := \sup_D s(f, D)$$

$$(\mathbb{R}) \int_a^b f(x) dx := \inf_D S(f, D)$$

nazýváme DOLNÍM A HORNÍM RIEMANNOVÝM INTEGRÁLEM z funkce f přes $[a; b]$.

DEFINICE 72: Jestliže

$$(\mathbb{R}) \int_a^b f(x) dx = (\mathbb{R}) \int_a^b f(x) dx,$$

pak říkáme, že f je na $[a; b]$ Riemannovsky srovnatelné (a značíme $f \in \mathbb{R}([a; b])$) a její Riemannův integrál je

$$(\mathbb{R}) \int_a^b f(x) dx = (\mathbb{R}) \int_a^b f(x) dx = (\mathbb{R}) \int_a^b f(x) dx.$$

POZNÁMKA 55: f musí být omezená na $[a; b]$!

PŘÍKLAD 42: (i) $f(x) = 2, x \in [-1; 4]$

$$\forall \mathcal{I} \subset [-1; 4] : \sup_{\mathcal{I}} f = \inf_{\mathcal{I}} f = 2 \Rightarrow s(f, D) = S(f, D) = 10 \quad \forall D$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^4 2 dx = 10$$

(ii) $f(x) = D(x)$ (Dirichletova funkce)

$$\forall \mathcal{I} \subset [0; 1] : \sup f = 1 \ \& \ \inf f = 0 \Rightarrow s(f, D) = 0; S(f, D) = 1$$

$$(\mathbb{R}) \int_a^b f(x) dx = 0, (\mathbb{R}) \int_a^b f(x) dx = 1 \Rightarrow D(x) \notin \mathbb{R}([0; 1])$$

VĚTA 52: LEMMA: Nechť f je omezená na $[a; b]$.

(i) Nechť D, D' jsou dělení na $[a; b]$, přičemž D' zjemňuje D . Potom

$$s(f, D) \leq s(f, D') \leq S(f, D') \leq S(f, D).$$

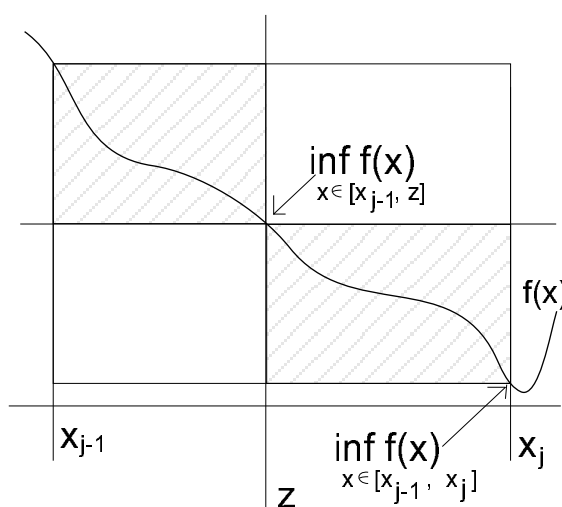
(ii) Nechť D_1 a D_2 jsou dvě dělení $[a; b]$. Potom

$$s(f, D_1) \leq S(f, D_2).$$

DŮKAZ 52: (ii) okamžitě z (i): vezmeme D společné zjemnění D_1 a D_2 (např. $D = D_1 \cup D_2$). Potom z (i) $s(f, D_1) \leq s(f, D) \leq S(f, D) \leq S(f, D_1) \Rightarrow$ (ii)

(i) stačí $S(f, D) \leq S(f, D')$ pro $D = \{x_0, x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, \dots, x_n\}$,
 $D' = \{x_0, x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, z, \dots, x_n\}$

K důkazu lemmatu:



$$(1) \inf_{x \in [x_{j-1}; x_j]} f(x) \leq \inf_{x \in [x_{j-1}; z]} f(x)$$

$$(2) \inf_{x \in [x_{j-1}; x_j]} f(x) \leq \inf_{x \in [z; x_j]} f(x)$$

$$(1) \cdot [z - x_{j-1}] + (2) \cdot [x_j - z]$$

$$\Rightarrow \inf_{x \in [x_{j-1}; x_j]} f(x) \cdot (x_j - x_{j-1}) \leq \inf_{x \in [x_{j-1}; z]} f(x) \cdot (z - x_{j-1}) + \inf_{x \in [z; x_j]} f(x) \cdot (x_j - z)$$

$$\Rightarrow s(f, D) \leq s(f, D')$$

□

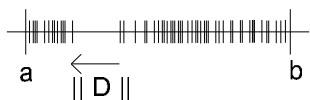
DŮSLEDEK: f omezená na $[a; b]$, $m = \inf_{[a; b]} f$, $M = \sup_{[a; b]} f$, D_1, D_2 dělení, pak

$$m(b - a) \leq s(f, D_1) \leq (R) \int_a^b f(x) dx \leq (R) \int_a^b f(x) dx \leq S(f, D_2) \leq M(b - a)$$

ÚMLUVA 8: Je - li $\mathcal{I} = [a; b]$, pak značíme

$$|\mathcal{I}| = b - a \quad (\text{délka intervalu}).$$

DEFINICE 73: Nechť D je dělení $[a; b]$, $D = \{x_0, \dots, x_n\}$ ($x_0 = a, x_n = b$). Označme $\mathcal{I}_j = [x_{j-1}; x_j]$, $j = 1, \dots, n$, NORMOU DĚLENÍ D nazýváme číslo $\|D\| := \max_{j=1, \dots, n} |\mathcal{I}_j|$



VĚTA 53: (O APROXIMACI HORNÍHO A DOLNÍHO RIEMANNOVA INTEGRÁLU.) Nechť f je omezená na $[a; b]$, nechť $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost dělení, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|D_n\| = 0$. Potom

$$(R) \int_a^b f(x) dx = \sup_n s(f, D_n),$$

$$(R) \int_a^b f(x) dx = \inf_n S(f, D_n).$$

DŮKAZ 53: Stačí dokázat, že $\forall \epsilon > 0 \forall D$ dělení $[a; b] \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby $s(f, D_{n_0}) \geq s(f, D) - \epsilon$. Potom totiž (přejdeme-li k supremu): $\sup_D s(f, D) \geq \sup_n s(f, D_n) \geq \sup_D s(f, D) - \epsilon \forall \epsilon$, a tedy $\sup_D s(f, D) = \sup_n s(f, D_n)$.

Mám $\epsilon > 0$, D pevné. Musím najít $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby $s(f, D_{n_0}) \geq s(f, D) - \epsilon$.

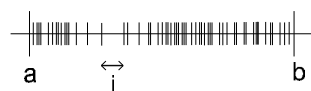
Vím, že $\exists K > 0$: $K = \sup_{[a; b]} |f|$ (neboť f je omezená na $[a; b]$).

Označím $\#D$ počet intervalů dělení D .

Zvolím n_0 tak, aby $\|D_{n_0}\| < \frac{\epsilon}{\#D \cdot K}$ (to lze, neboť $\|D_n\| \rightarrow 0$).

Označím $P = D \cup D_{n_0}$. Pak $P = \{x_0, \dots, x_m\}$.

Označím $J = \{j = 1, \dots, m, [x_{j-1}; x_j] \text{ neobsahuje body z dělení } D\}$



$$\begin{aligned} s(f, D) &\leq s(f, P) = \sum_{j \in J} \inf_{x \in \mathcal{I}_j} f(x) \cdot |\mathcal{I}_j| + \sum_{j \notin J} \inf_{x \in \mathcal{I}_j} f(x) \cdot |\mathcal{I}_j| \\ &\leq s(f, D_{n_0}) + \sum_{j \in J} K \cdot \|D_{n_0}\| \\ &\leq s(f, D_{n_0}) + \#D \cdot K \cdot \|D_{n_0}\| \\ &< s(f, D_{n_0}) + \epsilon. \end{aligned}$$

□

PŘÍKLAD 43: Dokažte, že $(\mathbb{R}) \int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3}$.

Zvolíme $D_n = \left\{ \frac{j}{n} \right\}_{j=0}^{2n}$

$\|D_n\| = \frac{1}{n} \rightarrow 0$, a tedy mohu použít V52.

$$s(f, D_n) = \sum_{j=1}^{2n} \left(\frac{j-1}{n} \right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \cdot \sum_{j=1}^{2n-1} j^2 = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{(2n-1)(2n)(4n-1)}{6},$$

POZNÁMKA 56: $\sum_{k=1}^N k^2 = \frac{N \cdot (N+1) \cdot (2N+1)}{6}$

$$\int_0^2 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} s(f, D_n) = \frac{8}{3}$$

$$S(f, D_n) = \sum_{j=1}^{2n} \left(\frac{j}{n} \right)^2 = \dots$$

$$\int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow (\mathbb{R}) \int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3}.$$

VĚTA 54: (KRITÉRIUM EXISTENCE RIEMANNOVA INTEGRÁLU.) Nechť f je omezená na $[a; b]$. Pak

$$f \in \mathbb{R}([a; b]) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists D \text{ dělení } [a; b]$$

tak, aby

$$S(f, D) - s(f, D) < \epsilon.$$

DŮKAZ 54: „ \Rightarrow “: Vezmeme $\{D_n\}$, $\|D_n\| \rightarrow 0$, potom $\lim_{n \rightarrow \infty} s(f, D_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, D_n) = \int_a^b f(x) dx$

$$\Rightarrow \exists n_0 \text{ tak, že } S(f, D_{n_0}) - s(f, D_{n_0}) < \epsilon$$

$$\text{„}\Leftarrow\text{“ } \forall \epsilon > 0 (\mathbb{R}) \int_a^b f(x) dx - (\mathbb{R}) \int_{\underline{a}}^b f(x) dx \leq S(f, D) - s(f, D) < \epsilon$$

$$\Rightarrow \int_{\underline{a}}^b = \int_a^b \Rightarrow f \in \mathbb{R}([a; b]).$$

□

PŘÍKLAD 44: Nechť $f = R(x) \dots$ Riemannova funkce na $[0; 1]$. Dokažte, že $f = R([a; b])$ a že $(R) \int_0^1 f(x) dx = 0$.

POSTUP: dle V53 stačí: $\forall \epsilon > 0 \exists D: S(f, D) < \epsilon$.

$\epsilon > 0$ pevné. Zvolím $N \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{N} < \epsilon$.

Nechť k je počet racionálních čísel $\frac{p}{q}$ (nesoudělitelná), $q < N$.

Zvolím $D: \|D\| < \frac{\epsilon}{k}$.

Pak $S(f, D) = \sum_{\text{intervaly, které neobsahují } \frac{p}{q}, q < N} (\sup_{\mathcal{I}} f(x)) \cdot |\mathcal{I}| + \sum (\sup f(x)) \cdot |\mathcal{I}|$

$S(f, D) < \frac{1}{N} \cdot \underline{1} + k \cdot \underline{1} \cdot \|D\| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon$.

Rejstřík

- asymptota, 61
- axiom o supremu, 17
- Darbouxova vlastnost spojitých funkcí, 28
- derivace, 47
 - $n + 1$ -ní, 57
 - zleva, 47
 - zprava, 47
- dělení
 - norma D , 89
- Eulerovy substituce, 84
- funkce
 - $\arccos x$, 37
 - $\arcsin x$, 37
 - $\cos x$, 34
 - $\sin x$, 34
 - $\operatorname{arccotg} x$, 38
 - $\operatorname{arctg} x$, 38
 - $\operatorname{cotg} x$, 37
 - $\operatorname{tg} x$, 37
 - asymptota, 61
 - cyklometrické, 9
 - Dirichletova, 8
 - exponenciální, 9, 31
 - identická, 7
 - inflexní bod, 58
 - klesající na intervalu, 57
 - konkávni na $(a; b)$, 59
 - konstantní, 7
 - konvexní na $(a; b)$, 59
 - lichá, 7
 - maximum, 29
 - maximum lokální, 29
 - maximum lokální ostré, 29
 - maximum ostré, 29
 - minimum, 29
 - minimum lokální, 29
 - minimum lokální ostré, 29
 - minimum ostré, 29
 - monotónní, 8
 - neklesající, 8
 - neklesající na intervalu, 57
 - nerostoucí, 8
 - nerostoucí na intervalu, 57
 - nezáporná, 7
 - omezená, 8
 - omezená shora, 8
 - omezená zdola, 8
 - periodická, 8
 - polynomy, 9
 - primitivní, 74
 - racionální, 9
 - Riemannova, 8
 - rostoucí na intervalu, 57
 - ryze konkávni na $(a; b)$, 59
 - ryze konvexní na $(a; b)$, 59
 - ryze monotónní, 8
 - spojitá, 14
 - spojitá na $(a; b)$, 27
 - spojitá na $(a; b]$, 28
 - spojitá na $[a; b)$, 28
 - spojitá na $[a; b]$, 28
 - spojitá zleva, 15
 - spojitá zprava, 15
 - sudá, 7
 - Taylorův polynom, 66
 - tečna, 57
 - trigonometrické, 9
- horní závora, 17
 - nejmenší, 17
- hromadná hodnota, 24
- infimum, 17
- inflexní bod, 58
- integrace funkcí obsahujících odmocniny., 84
- integrace funkcí obsahujících výraz $\sqrt{ax^2 + bx + c}$, $a \neq 0$, 84
- integrace iracionálních funkcí, 82
- integrace racionálních funkcí, 80
- integrace trigonometrických funkcí a lepení, 82
- interval, 9
 - dělení, 86
 - zjemnění, 86
 - otevřený, 9
- Landauovy symboly, 72
- lepení, 82
- limita funkce, 10
 - zleva, 10
 - zprava, 10
- množina
 - obraz, 5
 - vzor, 5

- norma dělení D, 89
- obor
 definiční, 5
 hodnot, 5
- okolí bodu, 9
 levé, 9
 pravé, 9
 prstencové, 10
 redukované, 10
- podposloupnost, 20
- polynom Taylorův, 66
- polynomy, 9
- posloupnost, 20
 divergentní, 21
 hromadná hodnota, 24
 konvergentní, 21
 vybraná, 20
- pravidlo
 L'Hospitalovo, 55
- primitivní funkce, 74
- relace
 binární, 4
- Riemannův integrál, 87
 dolní, 86
 horní, 87
- Riemannův součet
 dolní, 86
 horní, 86
- rozšířená reálná osa, 9
 absolutní hodnota, 9
 dělení, 9
 násobení, 9
 sčítání, 9
 uspořádání, 9
- součin
 kartézský, 4
- spojitost, 14
- supremum, 17
- symboly Landauovy, 72
- Taylorův polynom, 66
- vlastnost
 Archimédova, 17
- věta
 Archimédova vlastnost, 17
 Bolzano - Cauchyova podmínka, 25
 Bolzano - Weierstrassova, 25
 Cauchyova věta o střední hodnotě, 54
 Cauchyův tvar zbytku, 69
 Darbouxova vlastnost spojitých funkcí,
 28
 Heineho, 26
 kritérium existence Riemannova inte-
 grálu, 90
 L'Hospitalovo pravidlo, 55
 Lagrangeova věta o střední hodnotě,
 54
- Lagrangeův tvar zbytku, 69
- monotónní funkce má jednostranné li-
 mity, 19
- nutná podmínka existence (lokálního)
 extrému, 53
- nutná podmínka existence inflexe, 58
- nutná podmínka existence primitivní
 funkce, 75
- o aproximaci horního a dolního Rie-
 mannova integrálu, 89
- o aritmetice derivací, 49
- o aritmetice limit, 12
- o derivaci inverzní funkce, 51
- o derivaci složené funkce, 49
- o dvou polícajtech, 14
- o existenci n -té odmocniny, 18
- o integraci per partes, 78
- o jednoznačnosti limity, 11
- o jednoznačnosti primitivní funkce až
 na konstantu, 74
- o limitě a omezenosti, 11, 21
- o limitě a uspořádání, 14
- o limitě derivací, 56
- o limitě podílu kladné a mizející po-
 sloupnosti, 22
- o limitě složené funkce, 15
- o limitě součinu omezené a mizející
 posloupnosti, 22
- o limitě vybrané posloupnosti, 21
- o nejlepší aproximaci funkce polyno-
 mem, 67
- o spojitosti inverzní funkce, 30
- o substituci, 77
- o tvaru asymptoty, 61
- o vztahu $\lim \sup$ ($\lim \inf$) a $\mathcal{H}(\{a_n\})$,
 24
- o vztahu derivace a monotonie, 56
- o vztahu derivace a spojitosti, 48
- o vztahu konvexity a druhé derivace,
 60
- o vztahu konvexity a jednostranných
 derivací, 59
- o vztahu konvexity a spojitosti, 60
- o vztahu limity a $\lim \sup$ a $\lim \inf$, 23
- o vztahu limity a jednostranných li-
 mit, 13
- obecný tvar zbytku, 68
- postačující podmínka existence inflexe,
 58
- Rolleova o střední hodnotě, 53
- spojitost a extrémy, 29
- spojitost a omezenost, 30
- spojitý obraz intervalu, 29
- zobrazení
 „na“, 5
 bijektivní, 5
 identické, 6
 injektivní, 5
 konstantní, 5

operace
 inverzní, 6
 restrikce, 6
 skládání, 6
prosté, 5
prosté & „na“, 5
surjektivní, 5