Matematika pro fyziky II

LS 2003 / 2004

Přednášející: RNDr. Dalibor Pražák, PhD.

17. listopadu 2004

Obsah

Kapitola 1

Křivkový integrál

Pojmy v kapitole 1: $\mathcal{C}^1$ křivky v $\mathbb{R}^n$, uzavřená, jednoduchá křivka, opačná křivka, součet křivek, křivkový integrál prvního druhu, křivkový integrál druhého druhu, křivkově souvislá množina, potenciál. Věta o základních vlastnostech křivkového integrálu.

Poznámka 1.1: Funkce $\varphi(t) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ je $\mathcal{C}^1$ v $[a,b]$ právě když existuje $\hat{\varphi}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ třídy $\mathcal{C}^1$ v $\mathbb{R}$ tak, že $\hat{\varphi}|_{[a,b]} = \varphi$.

Lemma 1.1: Nechť $\varphi(t) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$. Pak je ekvivalentní: Lemma 1.1

(1) $\varphi(t)$ je $\mathcal{C}^1$ v $[a,b]$

(2) $\varphi(t) \in \mathcal{C}([a,b]) \cap \mathcal{C}^1((a,b))$, existují vlastní jednostranné derivace $\varphi'_+(a)$, $\varphi'_-(b)$ a navíc

$$\varphi'_+(a) = \lim_{t \to a+} \varphi'(t) \qquad \varphi'_-(b) = \lim_{t \to b-} \varphi'(t)\,.$$

Důkaz lemmatu 1.1:
(1) $\Rightarrow$ (2): z předpokladů $\exists \tilde{\varphi} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}), \varphi = \tilde{\varphi}|_{[a,b]}$

zřejmě

$$\varphi \in \mathcal{C}\left([a,b]\right) \cap \mathcal{C}^1((a,b)), \qquad \begin{array}{r} \varphi = \tilde{\varphi} \text{ na } [a,b] \\ \varphi' = \tilde{\varphi}' \text{ na } (a,b) \end{array}$$

navíc $\varphi'_+(a) = \tilde{\varphi}'_+(a)$, neboť $\varphi = \tilde{\varphi}$ na $\mathcal{U}_+(a)$

$$\varphi'_+(a) = \tilde{\varphi}'_+(a) = \tilde{\varphi}'(a) = \lim_{t \to a+} \tilde{\varphi}'(t) = \lim_{t \to a+} \varphi'(t).$$

(2) $\Rightarrow$ (1):
Zdalipak $\exists \tilde{\varphi} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, kde $\tilde{\varphi}$ je rozšíření φ?

Polož

$$\tilde{\varphi}(t) = \begin{cases} \varphi(t) & t \in [a,b] \\ \varphi(a) + (t-a)\varphi'_+(a) & t < a \\ \varphi(b) + (t-b)\varphi'_-(b) & t > b \end{cases}$$

$\tilde{\varphi}$ je rozšíření φ - zřejmé
$\tilde{\varphi} \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ - zřejmé
$\tilde{\varphi}'$ existuje a je spojitá v $\mathbb{R}$: určitě platí v $\mathbb{R} \setminus \{a, b\}$

1. krok: $\tilde{\varphi}'_+(a) = \lim_{t \to a+} \tilde{\varphi}'(t)$ - platí, neboť $\tilde{\varphi} = \varphi$ na $\mathcal{U}_+(a)$, φ má tuto vlastnost

2. krok: $\tilde{\varphi}'_-(a) = \lim_{t \to a-} \tilde{\varphi}'(t) = \varphi_+; (a)$, neboť $\tilde{\varphi}'(t) = \varphi'_+(a)$; $t < a$
věta z prvního semestru: $\tilde{\varphi}(t)$ spojitá zleva v a, $\exists \lim_{t \to a-} \tilde{\varphi}'(t) = A$, potom $\tilde{\varphi}'(a) = A$
Závěr: $\tilde{\varphi}'_+(a) = \tilde{\varphi}'_-(a) = \varphi'_+(a)$ spojitost.

□

Definice 1.1: [**$\mathcal{C}^1$-křivky v $\mathbb{R}^n$.**] Nechť $\varphi(t) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ je $\mathcal{C}^1$ funkce taková, že $\varphi'(t) \neq 0$ všude v $[a, b]$. Potom φ (podrobněji dvojici $(\varphi(t), [a, b])$) nazvu **$\mathcal{C}^1$-křivkou v $\mathbb{R}^n$.** Definice

Nechť $\varphi(t) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ je spojitá funkce. Nechť existují body $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$ takové, že $\forall i = 1, \dots n$ je $\varphi|_{[x_{i-1}, x_i]}$ $\mathcal{C}^1$-křivka v $\mathbb{R}^n$. Potom φ (podrobněji dvojici $(\varphi(t), [a, b])$) nazvu **po částech $\mathcal{C}^1$-křivkou v $\mathbb{R}^n$**.

Množina
$$\langle \varphi \rangle = \varphi([a, b]) = \{\varphi(t) : \ t \in [a, b]\}$$
se nazývá **geometrický obraz křivky** φ.

Alternativní terminologie: $\langle \varphi \rangle \dots$ křivka, $(\varphi(t), [a, b]) \dots$ parametrizace křivky.

Úmluva značení 1.1: Křivka = po částech $\mathcal{C}^1$ křivka. Úmluva

Úmluva značení 1.2: **Terminologie.** Pro křivku $(\varphi(t), [a, b])$ zavádím: Úmluva
- $\varphi'(t)$ ... tečný vektor křivky (existuje nejvýše konečně výjimečných bodů, kde neexistuje $\varphi'(t)$, ale existují (obecně různé) $\varphi'_+(t)$, $\varphi'_-(t)$.)
- $\varphi'(t)/\|\varphi'(t)\|$ ... jednotkový tečný vektor. Norma je eukleidovská:

$$\|\varphi'(t)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \{\varphi'_i(t)\}^2}$$

Též definován až na konečně výjimek.
- $\varphi(a)$ ... počáteční bod φ, zkratka p. b. φ.
- $\varphi(b)$ ... koncový bod φ, zkratka k. b. φ.

Definice 1.2: [**Uzavřená, jednoduchá křivka.**] Křivka $(\varphi(t), [a, b])$ se nazve **jednoduchá**, je-li $\varphi(t)$ prosté v $[a, b]$. Definice
Křivka se nazve **uzavřená**, jestliže p. b. φ = k. b. φ. Uzavřená křivka se nazve **jednoduchá**, pokud φ je prosté v $[a, b)$.

Příklad 1.1: Příklad
- $\varphi(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$, $t \in [0, 1]$ je jednoduchá uzavřená, $\mathcal{C}^1$ křivka, $\langle \varphi \rangle$ je jednotková kružnice.

• čtverec je geometrický obraz jednoduché uzavřené křivky, která není $\mathcal{C}^1$.
• "8" je uzavřená křivka, která není jednoduchá

Definice 1.3: **[Opačná křivka, součet křivek.]** Nechť $(\varphi(t), [a, b])$ je křivka. Křivku Definice

$$\chi(t) := \varphi(-t), \qquad t \in [-b, -a]$$

nazvu **křivkou opačnou** k φ a značím $\ominus\varphi$.

Nechť $(\varphi(t), [a, b])$, $(\psi(t), [c, d])$ jsou křivky a k. b. φ = p. b. ψ. Potom křivku $(\chi(t), [a, b + d - c])$

$$\chi(t) = \begin{cases} \varphi(t), \ t \in [a, b] \\ \psi(t + c - b), \ t \in [b, b + d - c] \end{cases}$$

nazvu **součtem křivek** φ, ψ a značím $\varphi \oplus \psi$.

Poznámka 1.2:
• $\langle\varphi\rangle = \langle\ominus\varphi\rangle$, p. b. φ = k. b. $\ominus\varphi$, k. b. φ = p. b. $\ominus\varphi$. V alternativní terminologii: jde o tytéž křivky s opačnou orientací.
• každá po částech $\mathcal{C}^1$ křivka je součtem konečně mnoha $\mathcal{C}^1$ křivek: $\varphi = \varphi^1 \oplus \varphi^2 \oplus \dots \oplus \varphi^n$, kde $\varphi^i = \varphi|_{[x_{i-1}, x_i]}$ (body x_i z definice po částech $\mathcal{C}^1$ křivky.)

Definice 1.4: **[Křivkový integrál prvního druhu, křivkový integrál druhého druhu.]** Nechť (φ, I) je křivka v $\mathbb{R}^n$. Definice

1. Nechť $f(x) : \langle\varphi\rangle \to R$. **Křivkový integrál prvního druhu** funkce f po křivce φ definuji jako

$$\int_\varphi f \, ds := \int_I f(\varphi(t)) \|\varphi'(t)\| \, dt \, .$$

2. Nechť $F(x) : \langle\varphi\rangle \to \mathbb{R}^n$. **Křivkový integrál druhého druhu** funkce F po křivce φ definuji jako

$$\int_\varphi F \cdot d\varphi := \int_I F(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \, dt \, .$$

Integrály vpravo chápu jako Lebesgueovy a požaduji, aby byly konečné.

Poznámka 1.3:
• Lebesgueovu integrálu nevadí, že $\varphi'(t)$ není definováno v konečně bodech
• v konkrétních příkladech je obvykle integrand spojitý a integrál počítám jako Newtonův
• význam: 1. druhu, φ jednoduchá, $f \equiv 1$:

$$\int_\varphi 1 \mathrm{d}s = \text{délka } (\langle\varphi\rangle) = \int_{(a,b)} \|\varphi'(t)\| dt$$

délka: $\|\varphi(t + dt) - \varphi(t)\| \doteq \|\varphi'(t)\| dt$
obecněji: $\rho(x) : \langle\varphi\rangle \to [0, +\infty)$ délková hustota

$dm = \rho(x)dl$
$\int_\varphi \rho \mathrm{d}s =$ hmotnost $(\langle\varphi\rangle)$
• význam: 2. druhu:

$$\int_\varphi F(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt = \int_\varphi \underbrace{F(\varphi(t)) \cdot \frac{\varphi'(t)}{\|\varphi'(t)\|}}_{F \cdot t(\varphi(t))} \|\varphi'(t)\|dt =$$

F gravitační pole, φ dráha pohybu tělesa
$\Rightarrow \int_\varphi F \cdot d\varphi =$ práce vykonaná pohybem tělesa

Věta 1.1: **[Základní vlastnosti křivkového integrálu.]** 1. Nechť φ je křivka v $\mathbb{R}^n$, $f(x)$, $g(x) : \langle\varphi\rangle \to R$, $a \in R$. Potom Věta 1.1

$$\int_\varphi (f+g)\, ds = \int_\varphi f\, ds + \int_\varphi g\, ds\,, \qquad \int_\varphi af\, ds = a\int_\varphi f\, ds\,.$$

2. Nechť φ, ψ jsou křivky, k. b. $\varphi =$ p. b. ψ a $f(x) : \langle\varphi\rangle \cup \langle\psi\rangle \to R$. Potom

$$\int_{\varphi\oplus\psi} f\, ds = \int_\varphi f\, ds + \int_\psi f\, ds\,.$$

Analogická tvrzení platí pro integrál druhého druhu.

Důkaz věty 1.1:
(1)

$$\begin{aligned}&\int_\varphi (f+g)\mathrm{d}s = \\ &\qquad \int_{(a,b)} (f(\varphi(t)) + g(\varphi(t)))\, \|\varphi'(t)\|dt = \\ &\qquad \int_{(a,b)} f(\varphi(t))\|\varphi'(t)\|dt + \int_{(a,b)} g(\varphi(t))\|\varphi'(t)\|dt = \\ &\qquad \int_\varphi f\mathrm{d}s + \int_\varphi g\mathrm{d}s\end{aligned}$$

(2)

$$(\varphi(t), [a,b]), (\psi(t), [c,d]) : \ \chi = \varphi \oplus \psi$$

$$\chi(t) = \begin{cases} \varphi(t) & t \in [a,b] \\ \psi(t+c-b) & t \in [b, b+d-c] \end{cases}$$

$$\begin{aligned}&\int_\chi f\mathrm{d}s = \\ &\qquad \int_{(a,b+(d-c))} f(\chi(t))\|\chi'(t)\|dt = \\ &\qquad \int_{(a,b)} f(\varphi(t))\|\varphi'(t)\|dt + \underbrace{\int_{(b,b+d-c)} f(\psi(t+c-b))\|\psi'(t+c-b)\|dt}_{I}\end{aligned}$$

Substituce $t + c - b = \tau$

$$I = \int_{(c,d)} f(\psi(\tau))\|\psi'(\tau)\|d\tau = \int_\varphi f\mathrm{d}s + \int_\psi f ds$$

□

Lemma 1.2: Nechť $(\varphi(t), [a,b])$, $(\psi(\tau), [\alpha,\beta])$ jsou křivky. Nechť existuje $\chi(\tau)$: Lemma 1.2

$[\alpha,\beta] \to [a,b]$ vzájemně jednozačná funkce taková, že $\psi(\tau) = \varphi(\chi(\tau))$ pro $\forall \tau \in [\alpha,\beta]$ a $\chi'(\tau)$ je spojitá, nenulová v (α,β).

Potom pro každé $f(x) : \langle\varphi\rangle \to R$, $F(x) : \langle\varphi\rangle \to \mathbb{R}^n$ platí

$$\int_\varphi f\,ds = \int_\psi f\,\mathrm{d}s\,, \qquad \int_\varphi F\,d\varphi = \pm\int_\psi F\,\mathrm{d}s\,,$$

kde $\pm$ je podle toho, zda χ roste/klesá.

Důkaz lemmatu 1.2: $\psi(\tau) = \varphi(\chi(\tau))$
$\psi'(\tau) = \varphi'(\chi(\tau))\chi'(\tau)$ až na konečně mnoho výjimek
Pozorování: $\chi(\tau) : (\alpha,\beta) \to (a,b)$ je difeomorfimus

- $\chi'(\tau)$ spojitá nenulová
- $\chi^{-1}(a)$ je buď α nebo β

  nechť ne:

  $$\chi(\gamma) = a,\ \gamma \in (\alpha,\beta)$$
  $$\chi'(\gamma) \neq 0, \Rightarrow \chi(\mathcal{U}(\gamma)) = \mathcal{U}(\underbrace{\chi(\gamma)}_{=a}) \subset [a,b]$$

  spor.

$$\int_\varphi f\mathrm{d}s = \int_{(a,b)} f(\varphi(t))\|\varphi'(t)\|dt = \int_{(\alpha,\beta)} f(\varphi(\chi(\tau)))\|\varphi'(\chi(\tau))\||\chi(\tau)|d\tau =$$

substituce $t = \chi(\tau)$, $\tau \in (\alpha,\beta)$

$$= \int_{(\alpha,\beta)} f(\psi(\tau))\|\psi'(\tau)\|d\tau = \int_\psi f\mathrm{d}s$$

$$\int_\varphi F d\varphi = \int_{(a,b)} F(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt = \int_{(\alpha,\beta)} F(\varphi(\chi(\tau))) \cdot \varphi'(\chi(\tau))|\chi'(\tau)|d\tau =$$

$$\psi'(\tau) = \pm\varphi'(\chi(\tau))|\chi'(\tau)|, \text{ kde } \pm \text{ je podle } \chi' \underset{>}{<} 0$$

$$= \pm\int_{(\alpha,\beta)} F(\psi(\tau)) \cdot \psi'(\tau)d\tau = \pm\int_\psi F d\psi$$

$\square$

Poznámka 1.4: **Důsledek.** Nechť φ je křivka a $f(x) : \langle\varphi\rangle \to R$, $F(x) : \langle\varphi\rangle \to \mathbb{R}^n$. Potom

$$\int_{\ominus\varphi} f\,ds = \int_\varphi f\,ds \qquad \int_{\ominus\varphi} F\,d(\ominus\varphi) = -\int_\varphi F\,ds\,,$$

Věta 1.2: Nechť $(\varphi(t),[a,b])$, $(\psi(\tau),[\alpha,\beta])$ jsou jednoduché $\mathcal{C}^1$-křivky takové, že Věta 1.2

$\langle\varphi\rangle = \langle\psi\rangle$. Nechť $f(x) : \langle\varphi\rangle \to R$, $F(x) : \langle\varphi\rangle \to \mathbb{R}^n$. Potom

$$\int_\varphi f\,ds = \int_\psi f\,ds\,, \qquad \int_\varphi F\,d\varphi = \pm\int_\psi F\,ds\,,$$

kde $\pm$ je podle toho, zda $\varphi(t)$, $\psi(t)$ probíhají množinu $\langle\varphi\rangle = \langle\psi\rangle$ ve stejném/opačném smyslu.

Důkaz věty 1.2:
a) $\varphi(t), \psi(\tau)$ nejsou uzavřené.
Definuji $\chi(\tau) := \varphi^{-1}(\psi(\tau))$, $\chi(\tau) : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ je vzájemně jednoznačné.

Cíl: $\chi(\tau)$ je jako v lemmatu 1.2.
$\varphi(\chi(\tau)) = \psi(\tau)$
zbývá: $\chi'(\tau)$ spojitá, nenulová v (α,β)
zvolme $\tau_0 \in (\alpha,\beta)$ tak, aby $\hat{x} = \psi(\tau_0)$, $t_0 = \varphi^{-1}(\hat{x}) = \chi(\tau_0)$
zjevně: $t_0 \in (a,b)$, $\varphi'(t_0) \neq 0$, BÚNO $\varphi_1'(t_0) \neq 0 \Rightarrow \varphi_1'(t) \neq 0$ spojitá na jistém okolí t_0
existuje $T = T(\xi)$ inverzní k $\varphi_1 = \varphi_1(t)$ na jistém $\mathcal{U}(t_0)$
$\chi(\tau) = \varphi^{-1}(\psi(\tau))$, $\chi(\tau) = T(\psi(\tau))$, $\varphi_1^{-1} = T \in \mathcal{C}^1$
$\Rightarrow \chi(\tau) \in \mathcal{C}^1((\alpha,\beta))$
Proč $\chi'(\tau) \neq 0$ v (α,β):

$$\psi(\tau) = \varphi(\chi(\tau)) \quad /\frac{d}{d\tau} \text{ v } (\alpha,\beta)$$

$$\psi'(\tau) = \varphi'(\chi(\tau))\chi'(\tau)$$

$$\psi'(\tau) \neq 0 \text{ v } (\alpha,\beta) \quad \Rightarrow \quad \chi'(\tau) \neq 0 \text{ v } (\alpha,\beta)$$

$\Rightarrow$ platí předpoklady lemmatu 1.2 $\Rightarrow$ hledaný závěr

b) nechť φ, ψ jednoduché, uzavřené:

$$\exists! c \in (a,b) \text{ tak, že } \varphi(c) = \psi(\alpha)$$

$$\exists! \gamma \in (a,b) \text{ tak, že } \psi(\gamma) = \varphi(\alpha)$$

Tedy

$$\begin{array}{l} \varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_2, \quad \varphi_1 = \varphi|_{a,c} \quad \varphi_2 = \varphi|_{[c,b]} \\ \psi = \psi_1 \oplus \psi_2, \quad \psi_1 = \psi|_{\alpha,\gamma} \quad \varphi_2 = \psi|_{[\gamma,\beta]} \end{array}$$

φ_i, ψ_i - jednoduché, ne uzavřené: $\langle\varphi_1\rangle = \langle\psi_2\rangle$; $\langle\varphi_2\rangle = \langle\psi_1\rangle$:

$$\int_\varphi = \int_{\varphi_1} + \int_{\varphi_1} \overset{\text{bod } a}{=} \int_{\psi_1} + \int_{\psi_1} = \int_\psi$$

$\square$

Poznámka 1.5: Předchozí věta:
• křivkový integrál závisí pouze na obrazu křivky, ne na parametrizaci - integrál druhého druhu závisí navíc na směru probíhání.

• platí i pro po částech $\mathcal{C}^1$ křivky.
• předpoklad jednoduchosti je podstatný.
• předpoklad $\mathcal{C}^1$ ... stačí po částech $\mathcal{C}^1$
$\varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_2 \oplus \cdots \oplus \varphi_n \qquad \varphi_i$ jsou $\mathcal{C}^1$
$\psi = \psi_1 \oplus \psi_2 \oplus \cdots \oplus \psi_n \qquad \psi_i$ jsou $\mathcal{C}^1$
navíc $\langle\varphi_1\rangle = \langle\psi_1\rangle \Rightarrow \int_{\varphi_i} f\mathrm{d}s = \int_{\psi_i} f\mathrm{d}s$
• předpoklad "jednoduché" je podstatný:
φ ... libovolná, jednoduchá, uzavřená
$\psi = \varphi \oplus \varphi$, tedy $\langle\varphi\rangle = \langle\psi\rangle$
$\int_{\psi_i} f\mathrm{d}s = 2\int_{\varphi_i} f\mathrm{d}s \neq \int_{\varphi_i} f\mathrm{d}s$

Další cíl: za jistých předpokladů integál 2. druhu závisí jen na počátečním a koncovém bodu φ

Definice 1.5: **[Křivka.]** Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$. Křivka φ se nazve křivkou v M, pokud $\langle\varphi\rangle \subset M$. Definice

Definice 1.6: **[Křivkově souvislá množina.]** Množina $M \subset \mathbb{R}^n$ se nazve **křivkově souvislá**, pokud pro libovolné body x, $y \in M$ existuje φ křivka v M taková, že p. b. $\varphi = x$, k. b. $\varphi = y$. Definice

Příklad 1.2: Příklad

- $\mathbb{R}^n$ je křivkově souvislá
- každá $M \subset \mathbb{R}^n$ konvexní je křivkově souvislá

$$x, y \in M: \qquad \varphi(t) = (1-t)x + ty \quad t \in [0,1]$$

  konvexita $M \Rightarrow \langle\varphi\rangle \subset M$
  mezikruží: není konvexní, je křivkově souvislá

- $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(t,0) : t \in \mathbb{R}\}$ není křivkově souvislá

Definice 1.7: **[Potenciál.]** Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $F(x) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ spojitá. Řekneme, že křivkový integrál z $F(x)$ nezávisí v Ω na cestě, pokud $\int_\varphi F d\varphi = \int_\psi F d\psi$ pro libovolné φ, ψ v Ω křivky splňující p. b. $\varphi =$ p. b. ψ, k. b. $\varphi =$ k. b. ψ. Definice

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $F(x) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ je spojitá. Funkce $U(x) : \Omega \to R$ se nazve **potenciál** F, pokud $\nabla U(x) = F(x)$ pro $\forall x \in \Omega$.

Věta 1.3: Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, křivkově souvislá množina v $\mathbb{R}^n$. Nechť $F(x) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ je spojitá. Potom je ekvivalentní: Věta 1.3

1. existuje $\mathcal{C}^1$ funkce $U(x) : \Omega \to \mathbb{R}$, $U(x)$ je potenciál $F(x)$ v Ω.
2. křivkový integrál z $F(x)$ nezávisí v Ω na cestě.

Důkaz věty 1.3: $\underline{1 \Rightarrow 2}$:

Nechť $(\varphi, [a,b])$ je libovolná křivka v Ω. Pak $\int_\varphi F d\varphi = \int_a^b F(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt$.

Klíčové pozorování: $U(\varphi(t))$ je zobecněná primitivní funkce k $F(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ na (a,b)

- spojitost ... OK
- $[U(\varphi(t))]' = \nabla U(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = F(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$

  tedy $\sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial x_i}(\varphi(t))\varphi_i'(t)$ až na konečně výjimek (kde neexistuje φ'). Odtud

$$\int_a^b F(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = [U(\varphi(t))]_a^b = U(\text{k.b. } \varphi) - U(\text{p.b. } \varphi),$$

tj. závisí jen na počátečním a koncovém bodě.

$\underline{2 \Rightarrow 1}$:

Cíl: $\exists U(x)$ potenciál $F(x)$

zvol $x_0 \in \Omega$ pevně, definuji

$$U(x) := \begin{cases} 0 & x = x_0 \\ \int_\varphi F d\varphi, & x \neq x_0, \text{ kde } \varphi \text{ je libovolná křivka v } \Omega, \text{ p.b. } \varphi = x_0, \text{ k.b. } \varphi = x, \end{cases}$$

korektnost definice:

- vždy najdu takové φ (křivková souvislost Ω)
- je jedno, které zvolím díky (2)

Zbývá: $\nabla U = F$:
Zvol $a \in \Omega$, $i = 1, \dots, n$. Cíl: $\frac{\partial U}{\partial x_i}(a) = F_i(a)$
φ je křivka spojující x_0 s a
ψ je křivka $\psi(t) = a + the_i$, $t \in [0,1]$, $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $e_i = 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0$, kde 1 je na i-té pozici, tedy ψ je úsečka spojující a s $a + he_i$

Počítejme:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}[U(a+he_i) - U(a)] &= \frac{1}{h}[\int_{\varphi\oplus\psi} F d(\varphi \oplus \psi) - \int_\varphi F d\varphi] \\ &= \frac{1}{h}[\int_\psi F d\psi \\ &= \frac{1}{h}\int_0^1 F(a + the_i) \cdot he_i dt \\ &= \int_0^1 F(a + the_i) dt \\ &= \underbrace{\int_0^1 F_i(a) dt}_{F_i(a)} + \underbrace{\int_0^1 F_i(a + the_i) - F_i(a) dt}_{I(h), \text{ jak vypadá pro } h \to 0?} \end{aligned}$$

$F(x)$ spojitá v $a \Rightarrow F_i(x)$ spojitá v a
Nechť je $\varepsilon > 0$ dáno: $\exists \delta > 0$: $\|x\| < \delta \Rightarrow |F_i(a+x) - F_i(a)| < \varepsilon$, stačí $|h| < \delta$. Pak je

$$|I(h)| \leq \int_0^1 \underbrace{|F_i(a + \underbrace{the_i}_{\|the_i\|<\delta}) - F_i(a)|}_{<\varepsilon} \, dt < \varepsilon$$

Zbývá rozmyslet, že $U \in \mathcal{C}^1$.
Zřejmě $\nabla U \in F \in \mathcal{C}$.
Je ale $U \in \mathcal{C}$? Ano, např. protože má (lokálně) omezené arciální derivace, viz Lemma ???.

□

Poznámka 1.6: $F : \Omega \to \mathbb{R}^2$ má potenciál $\Rightarrow \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$
jak vypadá implikace "$\Leftarrow$"? Vyjasníme později.

Kapitola 2

Plošný integrál

Pojmy v kapitole 2: Plocha, parametrizace plochy, jednoduchá plocha, vnější součin, plošný integrál 1. druhu, orientovaná plocha, souhlasná parametrizace, plošný integrál 2. druhu, zobecněná plocha, plošný integrál 1. a 2. druhu, diferenciální operátory, oblast, vnejší normála, plocha s okrajem, jednoduše souvislá oblast, k-plocha. Věta o zadání plochy, korektnost definice plošného integrálu 1. druhu, výpočet plošného integrálu 2. druhu, Grammův determinant, věta Gauss - Ostrogradského, věta o divergenci, věta o divergenci v rovině, Greenova věta, výpocet divergence integrálními průměry, Stokesova věta, existence potenciálu v R^2, existence potenciálu v R^3.

Poznámka 2.1: Obecně: integrování přes k-rozměrné útvary (k-plochy) v $\mathbb{R}^n$. Omezíme se na případ $k = 2$, $n = 3$.

Definice 2.1: **[Plocha, parametrizace plochy.]** Množina $S \subset \mathbb{R}^3$ se nazve <u>PLOCHA</u>, pokud $S = \varphi(\Omega)$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina a $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ splňuje: Definice
(1) φ je $\mathcal{C}^1$
(2) $h(\nabla\varphi) = 2$ všude v Ω
Dvojice (φ, Ω) se nazývá <u>PARAMETRIZACE PLOCHY S</u>.

Plocha je <u>JEDNODUCHÁ</u>, pokud φ je prosté a φ^{-1} je spojité na S.

Poznámka 2.2:

- požadavek (1) ... plocha je hladká
- požadavek (2) ... plocha nedegeneruje např. v křivku
- požadavek φ^{-1} spojité: plocha se nazavinuje - vylučuje situaci, kdy kraj se dotýká vnitřku plochy
- terminologie předchozí kapitoly: (φ, Ω) - plocha, S - geometrický obraz plochy

Příklad 2.1: Příklad

1. φ: $x = \cos u \cos v$, $y = \sin u \cos v$, $z = \sin v$, kde $(u,v) \in \Omega = (0,2\pi) \times (-\pi/2, \pi/2)$ parametrizuje S... jednotkovou sféru s výjimkou jednoho "poledníku"
2. φ: $y = y$, $z = z$, $x = \sqrt{1 - y^2 - z^2}$, kde $(y,z) \in \Omega = \{(y,z) : \ y^2 + z^2 < 1\}$ ... horní půlka téže sféry

Věta 2.1: **[Zadání plochy.]** (1) Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina a $f(x,y) : \Omega \to \mathbb{R}$ je $\mathcal{C}^1$ funkce. Potom Věta 2.1

$$\operatorname{graf} f = \{(x,y,z) : \ (x,y) \in \Omega, \ z = f(x,y)\}$$

je jednoduchá plocha.
(2) Nechť $F(x,y,z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je $\mathcal{C}^1$ funkce. Nechť $a \in \mathbb{R}^3$ je bod takový, že $F(a) = 0$ a $\nabla F(a) \neq 0$. Pak existuje $\varepsilon > 0$ takové, že množina

$$\mathcal{U}(a,\varepsilon) \cap \{F = 0\}$$

je jednoduchá plocha.

Důkaz věty 2.1:

1.
$$\begin{array}{lll} \varphi : & x = x & \varphi(\Omega) = \operatorname{graf} f \\ & y = y & \varphi \text{ je } \mathcal{C}^1 \\ & z = f(x,y) & \nabla\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{pmatrix} \end{array}$$

   hodnost $\nabla\varphi$ je 2 - je to plocha
   $\varphi : (x,y) \to (x,y,f(x,y))$
   φ je zjevně prosté
   $\varphi^{-1} = \pi_2$:

   $\pi_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ projekce

   $\pi_2 : (x,y,z) \to (x,y)$ zjevně spojité

2. $\nabla F(a) = (F_x(a), F_y(a), F_z(a)) \neq 0$
   BÚNO $F_z(a) \neq 0$, kde $a = (a_1, a_2, a_3)$
   $\exists \mathcal{C}^1$ funkce $f : \mathcal{U}((a_1,a_2),\delta) \to \mathcal{U}(a_3,\Delta)$ $\exists \delta, \Delta > 0$
   $\{F = 0\} \cap [\mathcal{U}((a_1,a_2),\delta) \times \mathcal{U}(a_3,\Delta)] = \operatorname{graf} f$, graf f je jednoduchá plocha
   chceme kulaté okolí
   pro ε dost malé $\{F = 0\} \cap \mathcal{U}(a,\varepsilon) = \operatorname{graf} \tilde{f}$, kde $\tilde{f} = f\big|_{\Omega}$, $\Omega \subset \mathcal{U}((a_1,a_2),\delta)$ je vhodná otevřená množina

□

Poznámka 2.3: **[Vnější součin.]** Pro $u = (u_1,u_2,u_3)$, $v = (v_1,v_2,v_3)$ vektory v $\mathbb{R}^3$ definuji $u \times v$ jako vektor $(u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$.

Vlastnosti:

- $(u + w) \times v = u \times v + w \times v$, $(au) \times v = u \times (av) = a(u \times v)$ (bilinearita)
- $u \times v = -(v \times u)$ (antisymetrie)

Geometrický význam:

- jsou-li u, v lineárně závislé, je $u \times v = 0$ (a naopak)
- jsou-li u, v lineárně nezávislé, je $w = u \times v$ (jednoznačně určený) vektor s těmito vlastnostmi:
  (1) w je kolmý na rovinu, určenou vektory u, v
  (2) délka w je rovna ploše rovnoběžníku, určeného vektory u, v
  (3) vektory u, v a w (v tomto pořadí) tvoří kladně orientovanou bázi, tj. determinant matice se sloupci u, v, w je kladný.

Vzorce:

- u, v, $w \in \mathbb{R}^3$: $w \cdot (u \times v) = \det(u, v, w)$ (zde $\cdot$ je skalární součin, (u, v, w) matice se sloupci u, v a w.)
- u, v, $\bar{u}$, $\bar{v} \in R^3$, kde $\bar{u} = au + bv$, $\bar{v} = cu + dv$, kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Potom

$$\|\bar{u} \times \bar{v}\| = |\det A|\ \|u \times v\| \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Definice 2.2: **[Plošný integrál 1. druhu.]** Nechť S je jednoduchá plocha, $f(x) : S \to \mathbb{R}$. Plošný integrál 1. druhu funkce f přes plochu S definujeme jako Definice

$$\int_S f\, dS = \int_\Omega [f \circ \varphi]\, \|\varphi_u \times \varphi_v\|\, dudv\,.$$

Integrál vpravo chápeme jako Lebesgueův a (φ, Ω) je libovolná parametrizace S.

Ve speciálním případě $f = 1$ dostaneme plošný obsah S.

Příklad 2.2: S_2: sféra: Příklad
nechť $u \in (0, 2\pi)$, $v \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
$\varphi_u = (-\sin u \cos v, \cos u \sin v, 0)$
$\varphi_v = (-\cos u \sin v, -\sin u \sin v, \cos v)$
$\varphi_u \times \varphi_v = (\cos u \cos^2 v, \sin u \cos^2 v, \sin^2 u \sin v \cos v + \cos^2 u \sin v \cos v)$
$\|\varphi_u \times \varphi_v\|^2 = \cos^2 u \cos^4 v + \sin^2 u \cos^4 v + \sin^2 v \cos^2 v = cos^2 v(\cos^2 u \cos^2 v + \sin^2 u \cos^2 v + \sin^2 v) = \cos^2 v$
$\|\varphi_u \times \varphi_v\| = |\cos v|$
obsah $S_2 = \int_\Omega |\cos v| dudv = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos v dudv = 4\pi$

Věta 2.2: **[Korektnost definice.]** Integrál 1. druhu nezávisí na parametrizaci. Věta 2.2

Důkaz věty 2.2: S jednoduchá ($\varphi : \Omega_1 \to S, \Psi : \Omega_2 \to S$ parametrizace, $f : S \to \mathbb{R}$), chci najít χ tak, že $\psi \circ \chi = \varphi$
definuji: $\chi := \psi^{-1} \circ \varphi$ je spojité, vzájemně jednoznačné:
$\chi : \Omega_1 \to \Omega_2$
cíl: χ je difeomorfismus ($\mathcal{C}^1$ a regulární)
zvolme $\omega \in \Omega_1$, ukážeme $\chi \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}(\omega))$
$\alpha = \chi(\omega)$, pak hodnost matice: $h(\nabla\psi(\alpha)) = 2$, kde $\nabla\psi(\alpha) = \left(\frac{\partial \Psi_1 \Psi_2 \Psi_3}{\partial tw} \right)$
BÚNO: det $\left(\frac{\partial \psi_1 \psi_2}{\partial tw}\right) \neq 0$ v α
označme $\tilde{\psi}$: $(t, w) \to (\underbrace{\psi_1(t, w)}_{x}, \underbrace{\psi_2(t, w)}_{y})$
věta o inverzní funkci: $\mathcal{I} = (\tilde{\psi}|_{\mathcal{U}(\alpha)})^{-1}$, $\mathcal{I}$ je $\mathcal{C}^1$
klíčové pozorování: $\chi = \mathcal{I} \circ \tilde{\varphi}$, $\tilde{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2)$
χ je $\mathcal{C}^1$ na okolí ω
Zdalipak platí $h(\nabla\chi) = 2$?
$\varphi = \psi \circ \chi$
$\nabla\varphi = [\nabla\psi \circ \chi] \cdot \nabla\chi$? Tedy $\nabla\chi$ musí mít hodnost 2
Sporem: kdyby $h(\nabla\chi) < 2 \Rightarrow h(\nabla\varphi) < 2 \ldots$ spor.

$$\int_S f dS \overset{\psi}{=} \int_{\Omega_2} f \circ \psi \|\psi_t \times \psi_w\| dt dw \overset{\substack{\text{substituce,} \\ (t,w) = \chi(u,v)}}{=} \int_{\Omega_1} [f \circ \psi] \circ \chi \|\psi_t \circ \chi \times \psi_n \circ \chi\| \, |\mathrm{J}\chi| du dv$$

$[f \circ \psi] \circ \chi = f \circ [\psi \circ \chi] = f \circ \varphi$
$\nabla\varphi = (\nabla\psi \circ \chi) \cdot \nabla\chi$
$\varphi_u, \varphi_v \xleftarrow{A} \psi_t \circ \chi, \psi_w \circ \chi$
$A = \nabla\chi$
$\|\varphi_u \times \varphi_v\| = |\mathrm{J}\chi| \; \|\psi_t \circ \chi \times \psi_w \circ \chi\|$
po úpravě $= \int_{\Omega_1} f \circ \varphi \; \|\varphi_u \times \varphi_v\| \; du dv \overset{\varphi}{=} \int f dS$

□

Definice 2.3: **[Orientovaná plocha.]** Řekneme, že plocha S je orientovaná, pokud existuje spojitá funkce $\nu(x) : S \to \mathbb{R}^3$ tak, že pro $\forall x \in S$ je $\nu(x)$ normálový vektor k S. Definice

Dvojice (S, ν) se nazývá <u>ORIENTOVANÁ PLOCHA</u>.

Poznámka 2.4:

- normálový vektor: kolmý na tečnou rovinu (ta je určena vektory φ_u, φ_v)
- názorně: rozlišuji "líc" plochy (ve směru ν) a "rub" plochy
- ne vždy existuje orientace - sféra, torus: ano, Möbiův list: ne.
- (S, ν) je orientovaná plocha ... $(S, -\nu)$ je opačně orientovaná plocha.
- jednoduchá plocha má vždy orientaci:

$$\nu := \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|} \circ \varphi^{-1} \qquad \text{na } S$$

Ve smyslu následující definice je to orientace souhlasná s parametrizací.

Definice 2.4: **[Souhlasná parametrizace.]** Nechť (S,ν) je orientovaná plocha. Řekneme, že parametrizace (φ,Ω) souhlasí s orientací, pokud Definice

$$\nu\circ\varphi=\frac{\varphi_u\times\varphi_v}{\|\varphi_u\times\varphi_v\|}\qquad \text{v } \Omega\,.$$

Příklad 2.3: sféra S_2: Příklad
$\varphi_y\times\varphi_v=\cos v(\cos u\cos v,\sin u\cos v,\sin v)$
$\|\varphi_u\times\varphi_v\|=\cos v$, $v\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{-\pi}{2}\right)$
$\nu\circ\varphi=(\cos u\cos v,\sin u\cos v,\sin v)$
$u=0$, $v=0$: $\varphi(0,0)=(1,0,0)$ … ven

Definice 2.5: **[Plošný integrál 2. druhu.]** Nechť (S,ν) je jednoduchá orientovaná plocha, $F(x):S\to\mathbb{R}^3$. Plošný integrál 2. druhu funkce F přes plochu S definujeme jako Definice

$$\int_{S,\nu}F\cdot d\vec{S}=\int_S(F\cdot\nu)\,dS\,,$$

kde integrál napravo chápu jako integrál 1. druhu (skalární) funkce $f(x)=F(x)\cdot\nu(x)$.

Poznámka 2.5:

- názorný význam: tok pole F plochou S.
- starší značení: $d\vec{S}=(dydz,dzdx,dxdy)$.

Lemma 2.1: **[Výpočet int. 2. druhu.]** Nechť (S,ν), F jsou jako výše. Potom Lemma 2.1

$$\int_{S,\nu}F\cdot d\vec{S}=\int_\Omega[F\circ\varphi]\cdot(\varphi_u\times\varphi_v)\,dudv=\int_\Omega\det(F\circ\varphi,\varphi_u,\varphi_v)\,dudv\,,$$

kde (φ,Ω) je libovolná parametrizace S souhlasná s orientací ν a $(F\circ\varphi,\varphi_u,\varphi_v)$ je matice se sloupci $F\circ\varphi$, φ_u a φ_v.

Důkaz lemmatu 2.1:

$$\int_{(S,\nu)}F\cdot d\vec{S}\overset{\text{def}}{=}\int_S[F\cdot\nu]dS\overset{\int 1.\text{ druhu}}{=}\int_\Omega\{[F\circ\varphi]\cdot\underbrace{[\nu\circ\varphi]\}\,\|\varphi_u\times\varphi_v\|}_{\varphi_u\times\varphi_v}dudv=$$

$$=\int_\Omega[F\circ\varphi]\cdot(\varphi_u\times\varphi_v)dudv=\int_\Omega\det(F\circ\varphi,\varphi_u,\varphi_v)dudv$$

(φ,Ω) souhlasí s ν: $\nu\circ\varphi=\frac{\varphi_u\times\varphi_v}{\|\varphi_u\times\varphi_v\|}$ v Ω

□

Příklad 2.4: $\int_{(S,\nu)}F\cdot d\vec{S}$, $F=(0,0,\nu)$. Příklad
S … vnější plášť kužele s podstavou $\{x^2+y^2<1\}=P$ a vrcholem $(0,0,1)$

orientovaným ven. Tedy
φ: $x = u$, $y = v$, $z = 1 - \sqrt{u^2+v^2}$, kde $(u,v) \in \Omega = P$
$\varphi_u = (1, 0, -\frac{u}{\sqrt{y^2+v^2}})$
$\varphi_v = (0, 1, -\frac{v}{\sqrt{y^2+v^2}})$
$\varphi_u \times \varphi_v = (.,.,1)\ \ldots$ první dva členy nás nezajímají, neboť v $\int$ násobím $(\varphi_u \times \varphi_v)$ skalárně s $[F \circ \varphi]$ a F má jen z-ovou složku

$$I = \int_\Omega 1 - \sqrt{u^2+v^2}dudv \underbrace{=}_{\substack{u = r\cos\alpha \quad r \in (0,1) \\ v = r\sin\alpha \quad \alpha \in (0,2\pi) \\ \mathrm{J} = r}} \int_{\Omega'} (1-r)rdrd\alpha = 2\pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3}\right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{\pi}{3}}}$$

plášť kužele není jednoduchá plocha

Definice 2.6: **[Zobecněná plocha.]** Množina $S \subset \mathbb{R}^3$ se nazve zobecněná plocha, pokud $S = \bigcup_j S^j \cup \Gamma$, kde S^j jsou jednoduché plochy a Γ lze pokrýt konečně mnoha křivkami. Navíc požaduji Definice

$$S^k \cap \overline{\bigcup_{j \neq k} S^j} \neq \emptyset \qquad (*)$$

Poznámka 2.6: $(*) \Rightarrow S^j$ vzájemně disjunktní, navíc S^k a S^l, kde $k \neq l$, můžou být spojené pouze hranami.

Příklad 2.5: Příklad

1. $S_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$ je zobecněná plocha: $S_2 = S^1 \cup S^2 \cup \Gamma$, kde S^1 (severní polokoule) je graf funkce $f(x,y) = \sqrt{1-(x^2+y^2)}$ na $\Omega = \{x^2+y^2 < 1\}$, S^2 (jižní polokoule) je graf funkce $-f(x,y)$ na Ω a Γ (rovník) je geometrický obraz $\chi(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $t \in [0, 2\pi]$.
2. povrch krychle $S = \partial\{[0,1]\times[0,1]\times[0,1]\}$ je zobecněná plocha: $S = \cup_{j=1}^6 S^j \cup \Gamma$, kde S^j jsou stěny a Γ sjednocení hran.

Definice 2.7: **[Plošný integrál 1. a 2. druhu.]** Nechť S je zobecněná plocha, $f : S \to \mathbb{R}$, $F : S \to \mathbb{R}^3$ funkce a $\nu : S \to \mathbb{R}^3$ orientace (tj. spojité pole normál). Plošný integrál 1. resp. 2. druhu definuji jako Definice

$$\int_S f\,dS = \sum_j \int_{S^j} f\,dS\,, \qquad \text{resp.} \qquad \int_{(S,\nu)} F \cdot \vec{S} = \sum_j \int_{(S^j,\nu)} F \cdot d\vec{S}\,.$$

Poznámka 2.7:

- definice je korektní: nezávisí na způsobu, jímž S rozložím na S^j a Γ
- orientace S nemusí existovat: krychle nemá normálu na hranách.

Lemma 2.2: Nechť a, b jsou vektory v $\mathbb{R}^3$. Potom Lemma 2.2

$$\det \begin{pmatrix} a \cdot a, & a \cdot b \\ a \cdot b, & b \cdot b \end{pmatrix} = \|a \times b\|^2 .$$

Důkaz lemmatu 2.2: možná později

□

Věta 2.3: **[Grammův determinant.]** Nechť S je jednoduchá plocha, (φ, Ω) její parametrizace a $f : S \to R$. Potom Věta 2.3

$$\int_S f\, dS = \int_\Omega (f \circ \varphi) \sqrt{g}\, dudv ,$$

kde

$$g = \det \begin{pmatrix} \varphi_u \cdot \varphi_v, & \varphi_u \cdot \varphi_v \\ \varphi_u \cdot \varphi_v, & \varphi_v \cdot \varphi_v \end{pmatrix}$$

je tzv. Grammův determinant.

Důkaz věty 2.3: $\int_S f dS = \int_\Omega [f \circ \varphi] \underbrace{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}_{\sqrt{g}, \text{ dle L2.2}} dudv$

□

Příklad 2.6: [Torus - anuloid] vznikne rotací kruhu ve vzdálenosti R od počátku okolo osy z, vznikne těleso tvaru pneumatiky: Příklad

$$\begin{aligned} x &= (R + \rho \cos v) \cos u \\ y &= (R + \rho \cos v) \sin u, \quad \text{kde } u, v \in (0, 2\pi),\ 0 < \rho < R \\ z &= \rho \sin v \end{aligned}$$

tímto popisem nepopíšeme celé těleso, chybí ještě prstýnek
$\varphi_u = [-\sin u(R + \rho \cos v), \cos u(R + \rho \cos v), 0]$
$\varphi_v = [\cos u(-\rho \sin v), \sin u(-\rho \sin v), \rho \cos v]$
$\varphi_u \cdot \varphi_v = (-\sin u \cos u + \sin u \cos u + 0) \cdot (R + \rho \cos v)\rho \sin v = 0$
$g = (\varphi_u \cdot \varphi_v)(\varphi_u \cdot \varphi_v)$
$\varphi_u \cdot \varphi_v = \rho^2 \sin^2 v + \rho^1 \cos^2 v = \rho^2$
$\|\varphi_y \times \varphi_v\| = \sqrt{g} = \sqrt{(R + \rho \cos v)^2 \rho^2} = (R + \rho \cos v)\rho$
povrch $= \int_S 1 dS = \int_\Omega (R + \rho \cos v)\rho dudv = 2\pi\rho \int_0^{2\pi} (R + \rho \cos v) dv = \underline{\underline{4\pi^2 \rho R}}$

Definice 2.8: **[Diferenciální operátory.]** Definice

1. (laplacián)

$$\triangle u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \qquad u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

2. (divergence)

$$\operatorname{div} u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \qquad u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

3. (rotace pro n=2)

$$\operatorname{rot} u = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \qquad u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

4. (rotace pro n=3)

$$\operatorname{rot} u = (\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}) \qquad u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

Lemma 2.3: Platí: Lemma 2.3

1. $\operatorname{div} u = \operatorname{tr}(\nabla u)$ (pro $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, tr A je stopa matice = sou4et diagonály)
2. $\triangle u = \operatorname{div} \nabla u$ (pro $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$)
3. $\operatorname{rot} u = \nabla \times u$ (pro $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$)
4. $\operatorname{div} \operatorname{rot} u = 0$ (pro $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$) pokud $u \in \mathcal{C}^2$

Důkaz lemmatu 2.3:

1. $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)_{j=1..n} \Rightarrow \operatorname{div}(\nabla u) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = \triangle u$
2. dcv.
3. $\nabla \times xu = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right) \times (u_1, u_2, u_3) = (\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \ldots)$

□

Definice 2.9: **[Oblast.]** Otevřená, křivkově souvislá množina $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá oblast. Je-li $M \subset \mathbb{R}^n$ (ne nutně otevřená), řekneme, že $u \in \mathcal{C}^1(M)$, pokud existuje $\Omega \supset M$ otevřená taková, že $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$. Definice

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je oblast, nechť $\partial\Omega$ je zobecněná plocha. Funkci $n(x) : S \to \mathbb{R}^3$ nazveme vnější normálou k $\partial\Omega$, pokud pro $\forall x \in S$ je $n(x)$ jednotkový vektor, kolmý na $\partial\Omega$, a navíc

$$(\exists \delta > 0)(\forall t \in (0, \delta))[x + tn(x) \notin \Omega]$$

Zobecnění: připouštíme, že $n(x)$ je definována pouze v $\partial\Omega \setminus \Gamma$, kde Γ lze pokrýt křivkami.

Věta 2.4: **[Gauss-Ostrogradského.]** Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je omezená oblast, $\partial\Omega$ je zobecněná plocha a $n = (n_1, n_2, n_3)$ je vnější normála. Nechť u, $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in C(\overline{\Omega})$ pro $i = 1$, 2, 3. Potom Věta 2.4

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\, d\lambda_3 = \int_{\partial\Omega} u n_i \, dS \qquad i = 1, 2, 3.$$

Důkaz věty 2.4:
<u>1. krok</u>: $\Omega = \{(x, y, z) : (x, y) \in P; g(x, y) < z < f(x, y)\}$
$P \subset \mathbb{R}^2$: oblast, $f, g \in \mathcal{C}^1(\bar{P})$
zřejmě $\partial\Omega = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \Gamma$, kde S_1 je graf f, S_2 je graf g, S_3 je boční plášť, Γ jsou okraje grafů f, g

$S_3 = \{(x,y,z) : (x,y) \in \partial P, g(x,y) < z < f(x,y)\}$
$\int_{S_1} un_3 dS = (**)$
$\varphi: \quad x = x$
$\quad\quad y = y$
$\quad\quad z = f(x,y)$
$\varphi_x = (1, 0, f_x)$
$\varphi_y = (0, 1, f_y)$
$n \circ \varphi = \frac{\varphi_x \times \varphi_y}{\|\varphi_x \times \varphi_y\|} \Rightarrow n_3 \circ \varphi = \frac{1}{\|\varphi_x \times \varphi_y\|}$
$\varphi_x \times \varphi_y = (-f_x, -f_y, 1) \ldots$ směřuje nahoru
$\|\varphi_x \times \varphi_y\| = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}$
$(**) = \int_P [un_3] \circ \varphi \ \|\varphi_x \times \varphi_y\| \ dxdy = \int_P [u \circ \varphi] \frac{1}{\|\varphi_x \times \varphi_y\|} \|\varphi_x \times \varphi_y\| dxdy =$
$= \int_P u(x, y, f(x,y)) dx \ dy$
analogicky: $\int_{S_2} un_3 dS = -\int_P u(x, y, f(x,y)) dxdy$
$\int_{S_3} u \underbrace{n_3}_{=0} dS$, $n_3 = 0$ na S_3 ... svislá stěna

$\int_{\partial\Omega} un_3 dS = \int_P \underbrace{u(x,y,f(x,y)) - u(x,y,g(x,y))}_{[u(x,y,z)]_{z=g(x,y)}^{z=f(x,y)}} dxdy = \int_P \left(\int_{g(x,y)}^{f(x,y)} \frac{\partial u}{\partial x_3}(x,y,z) dz \right) dxdy =$

$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_3}(x,y,z) \underbrace{dxdydz}_{d\lambda_3}$

2. krok: platí-li G.O. pro Ω_1, Ω_2, platí pro $\Omega = \Omega_1 \setminus \Omega_2$ podle kroku 1:

$$\int_{\Omega_1} \frac{\partial u}{\partial x_3} d\lambda_3 = \int_{\partial\Omega_1} un_3 dS$$

$$\int_{\Omega_2} \frac{\partial u}{\partial x_3} d\lambda_3 = \int_{\partial\Omega_2} un_3 dS \quad \text{/odčítáme}$$

LS $= \int \frac{\partial u}{\partial x_3} d\lambda_3$
PS $= \int_{\partial\Omega_1} un_3 dS - \int_{\partial\Omega_2} un_3 dS \overset{\text{klíčové pozorování}}{=} \int_{\partial\Omega} un_3 dS$

3. krok:
Podobně pro sjednocení: dospějeme k velmi obecným oblastem.

□

Věta 2.5: **[O divergenci.]** Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je omezená oblast, $\partial\Omega$ je zobecněná plocha a n je vnější normála. Nechť $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je $C^1(\overline{\Omega})$. Potom Věta 2.5

$$\int_\Omega \operatorname{div} u \, d\lambda_3 = \int_{\partial\Omega} u \cdot n \, dS \, .$$

Důkaz věty 2.5: V.2.4 $\Rightarrow \int_\Omega \underbrace{\frac{\partial u_i}{\partial x_i}}_{\text{div } u} d\lambda_3 = \int_{\partial\Omega} \underbrace{u_i n_i}_{u \cdot n} dS \ \ \forall i = 1,2,3, \sum_{i=1}^3$

□

Poznámka 2.8: $n \ldots$ orientace $\partial\Omega$

$$\int_{\partial\Omega} u \cdot n dS = \int_{(\partial\Omega,n)} u dS$$

Příklad 2.7: $\int \tau \cdot dS$, $\tau = (x^2, 0, 0)$, div $\tau = 2x$, (S, ν) - jednotková sféra orientovaná ven. Tedy Příklad

$$\int_{(S,\nu)} \tau \cdot dS = \int_{\partial(B(0,1))} (\tau \cdot n) dS \overset{V.2.5}{=} \int_{B(0,1)} \operatorname{div} \tau d\lambda_3 = 0$$

Definice 2.10: **[Vnější normála.]** Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je oblast, nechť $\partial\Omega = \langle\varphi\rangle$, kde φ je křivka. Funkce $n(x) : \partial\Omega :\to \mathbb{R}^2$ se nazve vnější normála k $\partial\Omega$, pokud pro $\forall x \in \partial\Omega$ je $n(x)$ jednotkový vektor, kolmý na $\partial\Omega$ (přesněji na tečnu φ). Navíc $n(x)$ směřuje ven z Ω. Definice

Zobecnění: dovolíme, že $n(x)$ je definována v $\partial\Omega$ až na konečně výjimek.

Věta 2.6: **[O divergenci v rovině.]** Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je omezená oblast, nechť $\partial\Omega = \langle\varphi\rangle$, kde φ je křivka, a n je vnější normála k $\partial\omega$. Nechť $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$. Potom Věta 2.6

$$\int_\Omega \operatorname{div} u \, d\lambda_2 = \int_\varphi u \cdot n \, ds \, .$$

Důkaz věty 2.6: vynecháme: podobný situaci v $\mathbb{R}^3$

□

Definice 2.11: Křivka φ obíhá množinu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ v kladném smyslu, pokud ji obíhá proti směru hodinových ručiček. Alternativně: platí pravidlo pravé ruky. Definice

Věta 2.7: **[Greenova.]** Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je omezená oblast, nechť $\partial\Omega = \langle\varphi\rangle$, kde φ je křivka, která obíhá Ω v kladném smyslu. Nechť $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$. Potom Věta 2.7

$$\int_\Omega \operatorname{rot} u \, d\lambda_2 = \int_\varphi u \cdot d\varphi \, .$$

Důkaz věty 2.7: pomocí V.2.6. ... pomocné pole: $v = (u_2, -u_1)$
V.2.6. $\Rightarrow \int_\Omega$ div $v d\lambda_2 = \int_\varphi v \cdot dS$
div $v = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} =$ rot u
$n = (n_1, n_2)$, $n \perp t$, $t \in (t_1, t_2)$, $t = \begin{cases} (-n_2, n_1) \\ (n_2, -n_1) \end{cases}$
$n, t \ldots$ kladně orientovaná báze $\Rightarrow t = (-n_2, n_1)$. Tedy: $v \cdot n = u \cdot t$.

□

Lemma 2.4: **[Výpočet divergence integrálními průměry.]** Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je otevřená, $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je $\mathcal{C}^1(\Omega)$. Potom Lemma 2.4

$$[\operatorname{div} u](x_0) = \lim_{\rho \to 0+} \frac{1}{\lambda_3(B(x_0,\rho))} \int\limits_{\partial B(x_0,\rho)} u \cdot n \, dS \qquad \forall x_0 \in \Omega \, .$$

Důkaz lemmatu 2.4: Označme $\lambda_3(B(x_0,\rho)) = |B_\rho|$, pak $(B(x_0,\rho)) = B_\rho$. Platí:

$$\frac{1}{|B\rho|}\int_{\partial B\rho} u\cdot ndS \overset{V.2.5}{=} \frac{1}{|B\rho|}\int_{B\rho} \text{div } u(x)d\lambda_3(x) =$$

$$= \frac{1}{|B\rho|}\int_{B\rho} [\text{ div } u](x_0)d\lambda_3 + \frac{1}{|B\rho|}\int_{B\rho} \underbrace{[\text{ div } u](x) - [\text{ div } u](x_0)}_{?\to 0 \text{ pro } \rho\to 0} d\lambda_3 = [\text{ div } u](x_0)$$

$u \in \mathcal{C}^1 \Rightarrow \text{div } u \in \mathcal{C}$
$\varepsilon > 0$ dané: $\exists\delta > 0$: $x \in B(x_0,\delta) \Rightarrow |\text{div } u(x) - \text{div } u(x_0)| < \varepsilon$
nechť $\rho < \delta$, pak $|I(\rho)| \le \frac{1}{|B\rho|}\int_{B\rho} \varepsilon d\lambda_3 = \frac{1}{|B\rho|}\varepsilon|B\rho| = \varepsilon$

$\square$

Definice 2.12: [Plocha s okrajem.] Jednoduchá plocha $S \subset \mathbb{R}^3$ se nazve plocha s okrajem, pokud existuje parametrizace (φ,Ω) taková, že φ je $\mathcal{C}^1$, prostá a $h(\nabla\varphi) = 2$ dokonce na $\Omega_1 \supset \overline{\Omega}$. Navíc $\partial\Omega = \langle\psi\rangle$, kde ψ je jednoduchá uzavřená křivka. Definice

Množina $\Gamma = \varphi(\partial\Omega)$ se nazývá okraj plochy S.

Je-li S navíc orientovaná a $\Gamma = \langle\chi\rangle$, řekneme, že křivka χ obíhá plochu S ve shodě s orientací ν, pokud (názorně řečeno): jdeme-li po okraji Γ ve smyslu χ s hlavou ve směru ν, máme S po levé ruce.

Věta 2.8: [Stokesova.] Nechť (S,ν) je jednoduchá orientovaná plocha s okrajem Γ. Nechť $\Gamma = \langle\chi\rangle$, kde χ obíhá S ve shodě s orientací ν. Nechť $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je $\mathcal{C}^1(S\cup\Gamma)$. Potom Věta 2.8

$$\int_{(S,\nu)} \big[\text{rot } F\big]\cdot dS = \int_\chi F\cdot d\chi\,.$$

Příklad 2.8: $S : 0 \le z = 4 - x^2 - y^2$ Příklad
$F = (2z, 3x, 5y)$
ν směřuje dolů

$$\varphi \quad \begin{aligned} x &= u\\ y &= v\\ z &= 4-u^2-v^2 \end{aligned}$$

$\varphi_u = (1,0,-2u)$
$\varphi_v = (0,1,-2v)$
$\varphi_u\times\varphi_v = (2u,2v,1)$ - není ve shodě s orientací
$\Omega : u^2+v^2 < 4$
rot $F = (5,2,3)$

$$\int_{(S,\nu)} [\text{rot } F]\cdot dS = -\int_\Omega [(\text{rot } F)\circ\varphi]\cdot(\varphi_u\times\varphi_v)dudv = -\int_\Omega 10u+4v+3dudv = -12\pi$$

Výraz $10u+4v$ se vyintegruje na nulu - Ω symetrická vůči u,v

$$\text{označme}\quad \chi \quad \begin{aligned} x &= 2\cos t\\ y &= 2\sin t\\ z &= 0 \end{aligned}$$

$t \in [0, 2\pi]$, $\chi' = (-2\sin t, 2\cos t, 0)$

$$\int_\chi F \cdot d\chi = \int_0^{2\pi} [F \circ \chi] \cdot \chi' dt = 12 \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = 12\pi$$

Znaménko χ není v souladu s orientací

Důkaz věty 2.8: další předpoklad: $\chi = \varphi \circ \psi$;
$\varphi \in \mathcal{C}^2$,
$\psi(t) : [a, b] \to \mathbb{R}^2$
trik: pomocná funkce $G : \Omega \to \mathbb{R}^2$: $G_j(u) = F_i(\varphi(u)) \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}(u)$ - používáme sčítací konvenci
Víme: platí Greenova věta pro G:

$$\int_\psi G \cdot d\psi = \int_\Omega \text{rot } G du$$

LS: $\int_a^b G(\psi(t)) \cdot \psi'(t) dt = \int_a^b G_j(\psi(t)) \psi_j'(t) dt = \int_a^b F_i(\varphi(\psi(t))) \underbrace{\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}(\psi(t)) \frac{\partial \psi_j}{\partial t}(t)}_{\frac{\partial}{\partial t}[\varphi_i(\psi(t))]} dt =$

$= \int_a^b F_i(\chi(t)) \chi_i'(t) dt = \int_\chi F \cdot d\chi$
PS:

pomocný výpočet:
$[\text{rot } G](u) = \frac{\partial G_2}{\partial u_1} - \frac{\partial G_1}{\partial u_2} = \frac{\partial}{\partial u_1}[F_i(\varphi(u)) \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_2}(u)] - \frac{\partial}{\partial u_2}[F_i(\varphi(u)) \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_1}(u)] =$
$\frac{\partial F_i(\varphi)}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial u_1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_2} + F_i(\varphi) \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial u_1 \partial u_2} - \frac{\partial F_i(\varphi)}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial u_2} \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_1} - F_i(\varphi) \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial u_2 \partial u_1}$
$\varphi \in \mathcal{C}^2$ - záměna parciálních derivací $\Rightarrow$ 2. a 4. člen se ruší.
značení: $F_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\varphi(u))$, $\varphi_{ij} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}(u)$
$= F_{ik} \varphi_{k1} \varphi_{i2} - F_{ik} \varphi_{k2} \varphi_{i1}$ (rozepíšu přes k)
$= [F_{i1} \varphi_{11} \varphi_{i2} + F_{i2} \varphi_{21} \varphi_{i2} + F_{13} \varphi_{31} \varphi_{i2}] - [F_{i1} \varphi_{12} + F_{i2} \varphi_{22} + F_{i3} \varphi_{32}] \varphi_{i1} =$
(rozepíšu přes i)
$= \underbrace{\{F_{32} - F_{23}\}}_{\text{1. složka } [\text{rot } F](\varphi(u))} \underbrace{(\varphi_{21} \varphi_{12} - \varphi_{32} \varphi_{11})}_{\text{1. složka } \varphi_{u1} \times \varphi_{u2}} +$
$+\{F_{13} - F_{31}\}(\varphi_{31} \varphi_{12} - \varphi_{32} \varphi_{11}) +$
$+\{F_{21} - F_{12}\}(\varphi_{11} \varphi_{22} - \varphi_{12} \varphi_{21})$
PS $= \int_\Omega [\text{rot } F](\varphi(u)) \cdot [\varphi_{u1} \times \varphi_{u2}] du dv = \int_{(S,\nu)} [\text{rot } F] \cdot dS$
neověřeno:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi \text{ parametrizuje } S \text{ ve shodě s } \nu \\ \psi \text{ obíhá } \Omega \text{ v kladném smyslu} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \chi = \varphi \circ \chi \text{ oběhne } S \text{ ve shodě s } \nu$$

$\square$

Poznámka 2.9: $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $F : \Omega \to \mathbb{R}^2$
F má v Ω potenciál $\to \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \text{rot } F = 0$
A co opačná implikace?
Obecně neplatí: závisí na tvaru Ω
Integrál nezávisí na cestě, pokud $\int_\varphi F \cdot d\varphi = \int_\psi F d\psi$ pro libovolná φ, ψ křivky v Ω,

kde φ, ψ mají stejný začátek a konec.
V.1.3: $\exists$ potenciál $\Leftrightarrow$ integrál nezávisí na cestě.

Lemma 2.5: Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je oblast, $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ je spojitá. Potom je ekvivalentní: Lemma 2.5

1. křivkový integrál z F nezávisí v Ω na cestě.
2. pro každou uzavřenou křivku χ v Ω je

$$\int_\chi F \cdot d\chi = 0\,.$$

Důkaz lemmatu 2.5:

- $(1) \Rightarrow (2)$
  Nechť χ je uzavřená křivka, nechť platí $\chi = \varphi \oplus \psi$
  označme $\tilde{\varphi} = \ominus\varphi$
  $\psi, \tilde{\varphi}$ mají stejný počátek a konec: $(1) \Rightarrow \int_\psi = \int_{\tilde{\varphi}} = -\int_\varphi$
  Tedy $\int_\chi = \int_\varphi + \int_\psi = 0$
- $(2) \Rightarrow (1)$
  Nechť φ, ψ mají stejný začátek a konec. Potom $\chi = \varphi \oplus (\ominus\psi)$ je uzavřená.
  $(2) \Rightarrow \int_\chi = 0$; $\int_\chi = \int_\varphi + \int_{\ominus\psi} = \int_\varphi - \int_\psi \Rightarrow \int_\varphi = \int_\psi$

$\square$

Poznámka 2.10: Důsledek. $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ má v Ω potenciál, právě když $\int_\chi F \cdot d\chi = 0$ pro každou uzavřenou křivku χ v Ω.

Příklad 2.9: $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $F = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}; \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ Příklad
rot $F = 0$ v Ω (DCV.), přesto F nemá v Ω potenciál
Sporem: nechť má: zvolme χ: $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$
$\chi' = (-\sin t, \cos t)$
$F \circ \chi = (-\sin t, \cos t)$
$\int_\chi F \cdot d\chi = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi \neq 0$ Spor síky předchozímu důsledku.
V čem je problém: rot $F \neq 0$ všude "uvnitř" křivky (bod(0,0)).

Definice 2.13: [Jednoduše souvislá oblast.] Oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ se nazve jednoduše souvislá, pokud platí: je-li χ jednoduchá uzavřená křivka v Ω, je množina, kterou χ ohraničuje, částí Ω. Definice

Ekvivalentně: každou jednoduchou uzavřenou křivku lze v Ω spojitě stáhnout do bodu.

Věta 2.9: [Existence potenciálu v $\mathbb{R}^2$.] Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je jednoduše souvislá oblast, $F : \Omega \to \mathbb{R}^2$ je C^1 a $\operatorname{rot} F = 0$ v Ω. Potom F má v Ω potenciál. Věta 2.9

Důkaz věty 2.9: Cíl: χ uzavřená křivka v $\Omega \Rightarrow \int_\chi F \cdot d\chi = 0$

1. krok: χ jednoduchá, označ $\hat{\Omega}$ oblast ohraničená χ, $\hat{\Omega} \subset \Omega$ (jednoduchá souvislost): Greenova veta

$$\int_\chi F \cdot d\chi = \pm \int_{\hat{\Omega}} \text{rot } F d\lambda_2 = 0$$

2. krok: χ obecná, úvaha:

$$\chi = \chi_1 \oplus \chi_2 \oplus \ldots \oplus \chi_n; \quad \chi_i \text{ jednoduchá, uzavřená}$$

obecně:

$$\int_\chi F \cdot d\chi = \sum_i \int_\chi F d\chi_i \overset{\text{krok 1}}{=} 0,$$

kde χ_i uzavřené, jednoduché

$\square$

Věta 2.10: **[Existence potenciálu v $\mathbb{R}^3$.]** Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je oblast, $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ je $\mathcal{C}^1$ a $\text{rot}\, F = 0$ v Ω. Nechť navíc Ω má následující vlastnost [*]: je-li χ libovolná jednoduchá uzavřená křivka v Ω, pak existuje $S \subset \Omega$ jednoduchá plocha taková, že $\langle \chi \rangle$ je okraj S. Věta 2.10

Potom F má v Ω potenciál.

Důkaz věty 2.10: Cíl: χ uzavřená: $\int_\chi F d\chi = 0$

1. krok: χ jednoduchá
$[*] \Rightarrow \chi$ okraj $S \subset \Omega$.
Stokes:

$$\int_\chi F \cdot dl = \int_S \text{rot } F \cdot dl = 0$$

2. krok: analogie jako ve V.2.9

$\square$

Poznámka 2.11:

- předpoklad jednoduché souvislosti Ω pro n=2 resp. [*] pro n=3 je podstatný
- bez těchto předpokladů podmínka $\text{rot}\, F = 0$ zaručí existenci potenciálu pouze lokálně, tj. na okolí bodu (to je jednoduše souvislé)
- předpoklad [*] není totéž co jednoduchá souvislost v $\mathbb{R}^3$ (ta se obecně definuje jinak)

Definice 2.14: **[k-plocha.]** Množina $M \subset \mathbb{R}^n$ se nazve k-plocha ($0 < k < n$), pokud $M = \varphi(\Omega)$, kde $\Omega \subset R^k$ je otevřená, φ je C^1 a navíc $h(\nabla\varphi) = k$ všude v Ω. Definice

Doplnění definice: jednobodová množina je 0-plocha, otevřená část $\mathbb{R}^n$ je n-plocha.

Zobecněný Jakobián ($\varphi : R^k \to \mathbb{R}^n$, $1 \leq k \leq n$)

$$J\varphi = \sqrt{\det\left[(\nabla\varphi)^T \cdot \nabla\varphi\right]}.$$

Pro $f : M \to R$ definuji plošný integrál 1. druhu jako

$$\int_M f\, dS_k = \int_\Omega (f \circ \varphi)\ J\varphi\,.$$

Poznámka 2.12:

- poslední definice zobecňuje řadu předchozích vzorců/definic (křivkový a plošný integrál, věta o substituci, atd.)
- lze vytvořit obecnou teorii, v níž se dokáže "obecná" Stokesova věta:

  $$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

  kde M je k-plocha, ∂M je okraj M (typicky $(k-1)$-plocha), ω je tzv. diferenciální forma, d je diferenciál.

  Gaussovu, Greenovu nebo námi dokázanou Stokesovu větu v $\mathbb{R}^3$ lze chápat jako speciální případy této obecné Stokesovy věty.

Kapitola 3

Fourierovy řady

Pojmy v kapitole 3: Trigonometrická řada, Fourierova řada, po částech spojitá funkce, Besselova nerovnost, Parsevalova rovnost. Věta o konvergenci Fourierovy řady, lemma o komplexním tvaru Fourierovy řady, lemma o integrálním tvaru Fourierovy řady, Riemann-Lebesgueovo lemma, Riemannova věta o lokalizaci, věta o derivování trigonometrické řady člen po členu, věta o integrování Fourierovy řady člen po členu.

Definice 3.1: [**Trigonometrická řada.**] Řada funkcí Definice

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos kx + b_k \sin kx]$$

kde a_k, $b_k \in \mathbb{R}$ jsou konstanty, se nazývá **trigonometrická řada**.

Poznámka 3.1: Pokud trigonometrická řada konveguje, je její součet 2π-periodická funkce. Hlavní otázka této kapitoly: lze naopak každou 2π-periodickou funkci napsat jako součet nějaké trigonometrické řady?

Lemma 3.1: (1) $\int_0^{2\pi} \sin nx = \int_0^{2\pi} \cos nx = 0$ pro $\forall n \neq 0$ celé, Lemma 3.1
(2) $\int_0^{2\pi} \sin nx \cos mx = 0$ pro $\forall m$, $n \geq 1$ celá,
(3) $\int_0^{2\pi} \sin nx \sin mx = \int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx = \pi\delta_{mn}$, ($\delta_{mn}$ je Kroneckerovo delta).

Důkaz lemmatu 3.1:
(1): zřejmé
(2): $\sin nx \cos mx = \frac{1}{2}[\sin(n+m)x + \sin(n-m)x]$
$\int_0^{2\pi} \quad =0$
(3): $\cos nx \cos mx = \frac{1}{2}[\underbrace{\cos \underbrace{(n+m)}_{\neq 0 \text{ celé}} x}_{\text{dá nulu}} + \underbrace{\cos(n-m)x}_{\substack{n \neq m \Rightarrow n-m \neq 0 \Rightarrow \int \cdots = 0 \\ n = m \Rightarrow \int \cdots = \pi}}]$

Funkce sin analogicky.

□

Poznámka 3.2: Předchozí lemma: funkce $\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, ...\}$ tvoří ortogonální systém vůči skalárnímu součinu $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)$.

Definice 3.2: **[Fourierova řada]** Nechť $f \in \mathcal{L}(0, 2\pi)$. Trigonometrická řada s koeficienty Definice

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)$$
$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \qquad k \geq 1$$
$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \qquad k \geq 1$$

se nazývá **Fourierova řada** funkce f. Značí se F_f. Čísla a_k, b_k se nazývají **Fourierovy koeficienty** funkce f.

Věta 3.1: Nechť trigonometrická řada konverguje stejnoměrně v $[0, 2\pi]$. Pak je Fourierovou řadou svého vlastního součtu. Věta 3.1

Důkaz věty 3.1: $s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ stejnoměrně v $[0, 2\pi]$ Počítejme $\hat{a}_k$, $\hat{b}_k$ koeficienty řady $\mathcal{F}_s$:

$$\hat{a}_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} s(x) = \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2}}_{a_0} + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

$$\text{stejnoměrná konvergence } \Rightarrow \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} a_k \cos kx + b_k \sin kx = 0 \quad \text{(Lemma 3.1)}$$

Pro $n \geq 1$ platí

$$\hat{b}_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} s(x) \sin nx = \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{a_0}{2} \sin nx}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \right) \sin nx}_{\text{stejnoměrná konvergence, záměna limity a integrálu}}$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} b_k \pi \delta_{nk} = b_n \qquad \text{(Lemma 3.1)}$$

□

Definice 3.3: **Po částech spojitá funkce.** Funkci f nazveme po částech spojitou v (a, b), pokud existují body $x_0 = a < x_1 < x_2 \cdots < x_n = b$ takové, že f je spojitá v intervalech (x_{j-1}, x_j) a navíc má v bodech x_j jednostranné vlastní limity. Definice

Funkci nazveme po částech $\mathcal{C}^1$, jestliže navíc $f'(x)$ je spojitá v (x_{j-1}, x_j) a $f'(x)$ navíc má v bodech x_j jednostranné vlastní limity.

Poznámka 3.3: Křivka v Kapitole 1: funkce po částech $\mathcal{C}^1$, navíc spojitá (zde nežádám.)

Věta 3.2: **[O konvergenci Fourierovy řady.]** Nechť $f \in \mathcal{L}(0,2\pi)$ je 2π-periodická a navíc po částech $\mathcal{C}^1$ v (a,b). Potom pro $\forall x \in (a,b)$ je Věta 3.2

$$\mathcal{F}_f(x) = \frac{1}{2}[f(x-) + f(x+)]$$

Speciálně $\mathcal{F}_f(x) = f(x)$ v bodech spojitosti.

Důkaz věty 3.2: $f \in \mathcal{L}(0,2\pi)$, 2π-periodická, po částech $\mathcal{C}^1$ na (a,b)
zvolme $x \in (a,b)$ pevně: cíl: $\mathcal{F}_{f,n}(x) \to \frac{1}{2}[f(x-) - f(x+)]$
dle V.3.3 stačí:

$$\int_0^\delta [f(x+z) + f(x-z) - \{f(x-) + f(x+)\}]D_n(z)dz \to 0 \quad \text{pro } n \to \infty$$

pro nějaké $\delta \in (0,\pi)$
f je po částech $\mathcal{C}^1$ v $(a, b \ni x)$. Zvol δ tak malé, že x je eventuelně jediný delicí bod v intervalu $[x-\delta, x+\delta] \setminus \{x\} \Rightarrow f, f'$ spojité v $[x-\delta, x+\delta]$, v x mají vlastní jednostranné limity

$$\int_0^\delta \underbrace{\left[\frac{f(x+z) - f(x+)}{z} + \frac{f(x-z) - f(x-)}{z}\right] \frac{\frac{z}{2}}{\sin\frac{z}{2}}}_{g(z)} \sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)z\right]$$

<u>**Klíčové pozorování:**</u> $g(z)$ po částech spojitá v $(0,\delta)$ (Závěr dle L.3.4)
Jediný problém: $\exists g(0+)$ vlastní:

$$\frac{\frac{z}{2}}{\sin\frac{z}{2}} \to 1 \quad \text{pro } z \to 0+$$

A co

$$\frac{f(x-z) - f(x-)}{z} = \frac{\hat{f}(x-z) - \hat{f}(x-)}{z} = (\odot)$$

$\hat{f}$ je f definovaná v bodě x limitou $f(x-) \Rightarrow \hat{f}$ spojitá na $[0,\delta]$
Lagrangeova věta: $(\odot) = -\hat{f}'(\xi)$
Pokud $z \to 0+$, pak $\xi \to x_-$
$x - z < \xi < x$
$(\odot) = -f'(\xi)$ $\exists$ vlastní

$\square$

Lemma 3.2: **[Komplexní tvar Fourierovy řady.]** Nechť $f \in \mathcal{L}(0,2\pi)$ je 2π-periodická. Označme Lemma 3.2

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\exp(-ikx)\,dx, \qquad k \in \mathcal{Z}\,.$$

Potom (formálně)

$$\mathcal{F}_f(x) = \sum_{k \in Z} c_k \exp(ikx)$$

Navíc platí vztahy

$$
\begin{aligned}
c_0 &= \frac{a_0}{2} \\
c_k &= \frac{1}{2}(a_k - ib_k) \\
c_{-k} &= \frac{1}{2}(a_k + ib_k)
\end{aligned}
$$

respektive

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 2c_0 \\
a_k &= c_k + c_{-k} \\
b_k &= i(c_k - c_{-k})
\end{aligned}
$$

kde a_k, b_k jsou Fourierovy koeficienty f.

Pro n-tý částečný součet Fourierovy řady $\mathcal{F}_{f,n}(x)$ platí

$$\mathcal{F}_{f,n}(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \exp(ikx)\,.$$

Důkaz lemmatu 3.2: $c_0 = \frac{a_0}{2}$ jasné. Víme, že $\mathrm{e}^{iy} = \cos y + i \sin y$. Dále:

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{e}^{-ikx} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)[\cos(-kx) + i\sin(-kx)] =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx) - \frac{i}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)\right\} = \frac{1}{2}(a_k - ib_k)$$

podobně pro c_{-k}.
Značíme:

$$\mathcal{F}_{f,n}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}[a_k \cos kx + b_k \sin kx]$$

Platí $\mathcal{F}_{f,n}(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \mathrm{e}^{ikx}$?

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \mathrm{e}^{ikx} = c_0 + \sum_{k=-n}^{n} c_k \mathrm{e}^{ikx} + \sum_{k=1}^{n} c_{-k}\mathrm{e}^{-ikx} = c_0 + \sum_{k=1}^{n} 2Re(c_k \mathrm{e}^{ikx}) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{2Re\left[\frac{1}{2}(a_k - ib_k)(\cos kx + i\sin kx)\right]}_{a_k \cos kx + b_k \sin kx}$$

neboť c_k a c_{-k} jsou komplexně sdružené ($\overline{c_k} = c_{-k}$).

□

Lemma 3.3: **[Integrální tvar Fourierovy řady.]** $f \in \mathcal{L}(0, 2\pi)$ je 2π-periodická. Lemma 3.3
Potom n-tý částečný součet F.ř. funkce f je

$$\mathcal{F}_{f,n}(x) = \int_{-\pi}^{\pi} D_n(z) f(x+z)\, dz$$

kde

$$D_n(z) = \frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)z\right]}{2\pi \sin\left(\frac{z}{2}\right)}$$

se nazývá Dirichletovo integrační jádro.

Důkaz lemmatu 3.3:

$$\mathcal{F}_{f,n}(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \mathrm{e}^{ikx} = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \mathrm{e}^{-iky} dy\ \mathrm{e}^{ikx} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{ik(x-y)} dy = \left| \begin{array}{c} \text{substituce} \\ x-y=z \\ dy=dz \end{array} \right| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+z) \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{ikz} dz$$

- meze nemusím posouvat: 2π-periodicita
- záměna $z \leftrightarrow -z$: $\sum_{k=-n}^{n}$

$$\sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{ikz} = Q^{-n} \sum_{k=0}^{2n} Q^k = Q^{-n} \cdot \frac{Q^{2n+1}-1}{Q-1} = \mathrm{e}^{-ikn} \cdot \frac{\mathrm{e}^{iz(2n+1)}-1}{\mathrm{e}^{iz}-1} =$$

toto je geometrická řada: $Q = \mathrm{e}^{ik}$

$$= \frac{e^{iz(n+\frac{1}{2})} - e^{-iz(n+\frac{1}{2})}}{\mathrm{e}^{iz/2} - \mathrm{e}^{-iz/2}} \frac{e^{iz(n+\frac{1}{2})}}{\mathrm{e}^{iz/2}} \mathrm{e}^{-zn} = \frac{\sin\left(z(n+\frac{1}{2})\right)}{\sin(\frac{z}{2})}$$

užiji vztahu:

$$\sin y = \frac{1}{2i}\left(\mathrm{e}^{iy} - \mathrm{e}^{-iy}\right).$$

□

Poznámka 3.4:
• $D_n(z) = D_n(-z)$
• $f \equiv 1$ ... $\mathcal{F}_f(x) \equiv 1$ ... $1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(z) = 1.$

Lemma 3.4: **[Riemann-Lebesgueovo lemma.]** Nechť $f \in \mathcal{L}(a,b)$. Potom Lemma 3.4

$$\lim_{t\to\infty} \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\sin(tx)\, dx = 0 \qquad \lim_{t\to\infty} \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\cos(tx)\, dx = 0\,.$$

kde $(\alpha, \beta) \subset (a,b)$ je libovolný (omezený) interval.

Poznámka 3.5: Důsledek: $f \in \mathcal{L}(a,b) \Rightarrow a_k, b_k \to 0$ pro $k \to \infty$
$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx$

Důkaz lemmatu 3.4: pouze pro f po částech spojitou

1. krok: $f(x) \in \mathcal{C}([a,b]) \Rightarrow f(x)$ je omezená: $|f(x)| \leq K$
$f(x) \ldots$ stejnoměrně spojitá
$\varepsilon > 0$ dáno: cíl: $\left|\int_\alpha^\beta f(x) \cos tx\right| < 2\varepsilon$ pro t velké
stejnoměrná spojitost $\Rightarrow \exists \delta > 0$: $\forall x, y \in [a,b]$ $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$
zvolme n tak, že $\frac{1}{n} < \delta$: $\{x_j\}$ dělení: $x_0 = \alpha < x_1 < \cdots < x_n = \beta$ na n stejných dílů.
Tedy $|x_j - x_{j-1}| = \frac{1}{n} < \delta$.
Definuji $h(x) = f(x_{j-1})$ pro $x \in (x_{j-1}, x_j)$, h je po částech konstantní
Klíčové pozorování: $|f(x) - h(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ (kromě x_j)
ověřím pro $x \in (x_{j-1}, x_j)$: $|f(x) - h(x)| = |f(x) - f(x_{j-1})| < \frac{\varepsilon}{b-a}$
neboť $|x - x_{j-1}| < x_j - x_{j-1} < \delta$

$$\int_\alpha^\beta f(x) \cos kx dx = \int_\alpha^\beta (f(x) - h(x)) \cos tx + \int_\alpha^\beta h(x) \cos tx = I_1 + I_2$$

BÚNO $\alpha = x_0, \beta = x_n$

$$|I_1| \leq (\beta - \alpha)\frac{\varepsilon}{b-a} \leq \varepsilon$$

$$I_2 = \int_\alpha^\beta h(x) \cos tx = \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} h(x) \cos tx = \sum_{j=1}^n f(x_{j-1}) \int_{x_{j-1}}^{x_j} \cos kx,$$

$$\text{kde} \quad \left|\int_{x_{j-1}}^{x_j} \cos tx\right| = \left|\left[\frac{\sin tx}{t}\right]_{x_{j-1}}^{x_j}\right| \leq \frac{2}{t}$$

$$\text{a tedy} \quad |I_2| \leq nK\frac{2}{t} < \varepsilon$$

pro t dost velké

2. krok: $f(x)$ po částech spojitá, $\{y_j\}_{j=1}^n$ dělicí body z definice
BÚNO: $\alpha = y_0$, $\beta = y_n$

$$\int_\alpha^\beta f(x) \cos tx = \sum_{j=1}^n \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x) \cos tx$$

$$\int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x) \cos tx = \int_{y_{j-1}}^{y_j} \hat{f}(x) \quad \to 0 \text{ dle kroku 1,}$$

kde

$$\hat{f}(x) := \begin{cases} f(x) & x \in (y_{j-1}, y_j) \\ f(y_{j-1}+) & x = y_{j-1} \\ f(y_{j-1}-) & x = y_j \end{cases}$$

Klíčové pozorování:

$$\hat{f}(x) \in \mathcal{C}\left([y_{j-1}, y_j]\right)$$

a užiji krok 1.

□

Věta 3.3: [Riemannova věta o lokalizaci.] Nechť $f \in \mathcal{L}(0, 2\pi)$ je 2π-periodická funkce, nechť $A \in \mathbb{R}$. Potom Věta 3.3

$$\mathcal{F}_f(x) \to A \qquad \text{pro } n \to A$$

právě když

$$\int_0^\delta \left[f(x+z) + f(x-z)\right] - 2A\right] \frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)z\right]}{\sin\left(\frac{z}{2}\right)} \, dz \to 0 \qquad \text{pro } n \to \infty\,,$$

kde $\delta \in (0, \pi)$ je libovolné, pevné.

Důkaz věty 3.3:

$$\mathcal{F}_{f,n}(x) \overset{L.3.3}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+z) D_n(z) dz = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^\pi + \underbrace{\int_{-\pi}^{0}}_{\text{subst. } z=-z} \right) f(x+z) D_n(z) dz =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [f(x+z) + f(x-z)] D_n(z) dz$$

Tedy

$$\mathcal{F}_{f,n}(x) - A = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [f(x+z) + f(x-z) - 2A] D_n(z) dz,$$

neboť

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(z) = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{\pi} \int_0^\pi D_n(z) = 1$$

vezmu $\delta \in (0, \pi)$ pevné:

$$\mathcal{F}_{f,n}(x) - A = \underbrace{\int_0^\delta [\ldots] D_n(z)}_{I_1} + \underbrace{\int_\delta^\pi [\ldots] D_n(z)}_{I_2}$$

$$I_2 = \frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi \underbrace{[f(x+z) + f(x-z) - 2A]}_{\text{integrovatelná } dz \text{ na } (\delta,\pi)} \cdot \qquad \underbrace{\frac{1}{\sin\frac{z}{2}}}_{\text{om. na } (\delta,\pi), \text{ spoj. na } [\delta,\pi]} \qquad \sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right) z\right] dz$$

$$I_2 = \int_\delta^\pi g(z) \sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right) z\right] dz \quad \to 0$$

dle V.3.4.

□

Definice 3.4: [L^p - integrovatelné funkce.] Pro $(a, b) \subset R$ a $p \in [1, \infty)$ definuji Definice

$$L^p(a, b) = \{f(x) : (a, b) \to \mathbb{R} : \ f \text{ je měřitelná}, \ \int_a^b |f(x)|^p < \infty\}$$

Poznámka 3.6: Za jakých okolností platí výrok (*) $\mathcal{F}_f(x) = f(x)$? (Předpokládáme, že f je 2π-periodická.)

• $f \in L^1(0, 2\pi)$: (*) nemusí platit pro žádné x
• $f \in L^2(0, 2\pi)$: (*) platí skoro všude (tzv. Carlesonova věta)
• $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$: (*) nemusí platit všude (platí skoro všude podle předchozího, neboť f je omezená a tudíž v $L^2(0, 2\pi)$.)
• f spojitá a navíc po částech $\mathcal{C}^1$: (*) platí pro všechna x. (Toto jediné jsme dokázali.)
• $L^1(a, b) = \mathcal{L}(a, b)$
• $(a, b) \subset \mathbb{R}$ omezený $\implies$ $L^2(a, b) \subset L^1(a, b)$
dk:

$$|f(x)| = |f(x)| \cdot 1 \leq \frac{1}{2}\left[|f(x)|^2 + 1\right]$$

Tedy $\int |f(x)|^2 < \infty \Rightarrow \int |f(x)| < \infty$.
• obráceně ne:

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \in L^1(0, 1) \setminus L^2(0, 1)$$

Poznámka 3.7: <u>**Diracova funkce:**</u> $\delta(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\int_a^b \delta(x) = \begin{cases} 1 & 0 \in (a, b) \\ 0 & 0 \notin (a, b) \end{cases}$$

neexistuje $f(x) \in \mathcal{L}^*(\mathbb{R})$ s touto vlastností! "Pokud by existovala", platilo by

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\delta(x) = \varphi(0)$$

pro $\forall \varphi(x) \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ $\delta(x)$ se dá aproximovat funkcemi, které existují:

$$f_n(x) = \begin{cases} n & x \in (0, \frac{1}{n}) \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

Pak

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) f_n(x) \to \varphi(0) \quad \text{pro } \varphi \text{ spojité}$$

$D_n(x)$ aproximuje δ funkci pro $n \to \infty$.

Věta 3.4: **[Besselova nerovnost.]** Nechť $f \in L^2(0, 2\pi)$ je 2π-periodická a a_k, b_k jsou její Fourierovy koeficienty. Potom Věta 3.4

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^2 + b_k^2\right) \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 .$$

Speciálně: řady $\sum a_k^2$, $\sum b_k^2$ konvergují.

Důkaz věty 3.4: Označ $s_n(x) = \mathcal{F}_{f,n}(x)$:

$$0 \leq \int_0^{2\pi} [f(x) - s_n(x)]^2 = \int_0^{2\pi} f^2 - 2\underbrace{\int_0^{2\pi} f s_n}_{B} + 2\underbrace{\int_0^{2\pi} s_n^2}_{C}$$

$$B=\int_0^{2\pi} f(x)\left\{\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}[a_k\cos kx+b_k\sin kx]\right\}dx$$

$$=\frac{a_0}{2}\underbrace{\int_0^{2\pi} f(x)}_{\pi a_0}+\sum_{k=1}^{n}\left[a_k\underbrace{\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx}_{\pi a_k}+a_k\underbrace{\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx}_{\pi b_k}\right]=\pi\left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right)$$

$$C=\int_0^{2\pi}\{\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}[a_k\cos kx+b_k\sin kx]\}^2dx=\int_0^{2\pi}\frac{a_0^2}{4}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2\cos^2 kx+b_k^2\sin^2 kx)=$$

chybí $\frac{a_0}{2}a_1\cos x,\ldots$ smíšené členy zmizí integrováním (L3.1)

$$=\pi\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right]$$

celkem:

$$0\le\int_0^{2\pi} f^2(x)-\pi\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right]\qquad\forall n\in\mathbb{N},\quad n\to\infty$$

$\square$

Věta 3.5: [Parsevalova rovnost.] Nechť $f\in L^2(0,2\pi)$ je 2π-periodická a a_k, b_k jsou její Fourierovy koeficienty. Potom je ekvivalentní: Věta 3.5

1. $$\int_0^{2\pi}|f(x)-\mathcal{F}_{f,n}(x)|^2\to 0\qquad\text{pro } n\to\infty$$

2. $$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2+b_k^2\right)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|^2.$$

Důkaz věty 3.5: V důkazu předchozí věty:

$$0\le\underbrace{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[f(x)]^2-\left\{\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right\}}_{LS}=\underbrace{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)-\mathcal{F}_{f,n}(x)|^2}_{PS}$$

Nechť (1) … $PS\to 0$, ale $PS=LS\to 0$ … platí (2)
Opačně: Nechť (2) … $LS\to 0\Rightarrow PS\to 0$ … platí (1)
"$\to$" pro $n\to\infty$

$\square$

Příklad 3.1: $f(x)=x^2$ pro $x\in[-\pi,\pi]$, 2π-periodická. Příklad
sudá $\Rightarrow b_k=0$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi}=\frac{2\pi^2}{3}$$

$$\frac{\pi}{2}a_k = \int_0^\pi x^2 \cos kx = \left[x^2 \frac{\sin kx}{k}\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{2x \sin kx}{k} =$$
$$= \frac{-2}{k}\left[x\frac{-\cos kx}{k}\right]_0^\pi - \frac{2}{k^2}\underbrace{\int_0^\pi \cos kx}_{0} = \frac{2}{k^2}((-1)^k\pi)$$

Tedy $a_k = \frac{4}{k^2}(-1)^k$

$$\mathcal{F}_{f,n}(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{n} 4\frac{(-1)^k}{k^2}\cos kx = f(x) \quad \text{platí pro } \forall x \in \mathbb{R}$$

spojitá, po částech $\mathcal{C}^1$
Parsevalova rovnost:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2 = \frac{2\pi^4}{9} + \sum_{k=1}^{n}\frac{16}{k^4}$$
$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

Zdalipak platí:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{k+1}}{k}\sin kx = f'(x) \quad (\Box) \quad ?$$

Opakování.

[Weierstrassova věta.] Nechť $|f_k(x)| \leq a_k$ v I a řada $\sum_k a_k$ konverguje. Potom řada funkcí $\sum_k f_k(x)$ konverguje absolutně stejnoměrně v I.

[Derivování řady člen po členu.] Nechť řada $\sum_k f_k(x)$ konverguje alespoň v jednom bodě $x_0 \in I$ a nechť řada $\sum_k f_k'(x)$ konverguje lokálně stejnoměrně v I. Potom řada $\sum f_k(x)$ též konverguje lokálně stejnoměrně v I. Navíc, její součet je diferencovatelná funkce a

$$\left\{\sum_k f_k(x)\right\}' = \sum_k f_k'(x)$$

všude v I.

Aplikace

$$\frac{4}{k}(-1)^k \sin kx = \underbrace{\frac{-4}{k}}_{\to 0 \text{ monotónně}} \quad \underbrace{\sin[k(\pi + x)]}_{h(x),\text{stejně omezené částečné součty}}$$

monotónně, stejnoměrně
minulý semestr:

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\sin ky\right| \leq \frac{2}{|\sin\frac{y}{2}|} \quad y \neq 2k\pi$$

Tedy

$$\left|\sum_{k=0}^{n} h(x)\right| \leq \frac{2}{|\sin\left(\frac{\pi+x}{2}\right)|}$$

Pokud $\frac{\pi+x}{2} = k\pi$, tedy $x = (2k-1)\pi \ldots$ liché násobky π
$x \in \mathcal{I} = (-\pi+\eta, \pi-\eta)$, kde $\eta \in (0,\pi)$ pevné.

$$\Rightarrow \left|\sum_{k=0}^{n} \sin k(\pi+x)\right| \leq \frac{2}{|\sin\frac{2\pi-\eta}{2}|}$$

Dirichletovo kritérium: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{k+1}}{k} \sin kx$ konverguje stejnoměrně v $\mathcal{I}$
$\Rightarrow$ nezderivovaná řada konverguje stejnoměrně v $\mathcal{I}$
$\Rightarrow$ ($\Box$) platí v $\mathcal{I}$

Poznámka 3.8: Výroky V.3.5. nejsou jen ekvivalentní - za předpokladu $f \in L^2(0,2\pi)$ oba vždy platí.
(2) ... se nazývá Parsevalova rovnost
(1) ... říká, že $\mathcal{F}_{f,n} \to f$ v prostoru $L^2(0,\pi)$.
Pro obecně l-periodickou funkci má Parsevalova rovnost tvar

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2 + b_k^2\right) = \frac{2}{l}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 .$$

Poznámka 3.9: Při počítání příkladů lze pozorovat (f po částech C^1):
f nespojitá ... a_k, $b_k \sim 1/k$
f spojitá, ale ne $\mathcal{C}^1$ ... a_k, $b_k \sim 1/k^2$
f je C^1 ... a_k, $b_k \sim 1/k^3$ etc.
Hypotéza: souvislost mezi hladkostí f a tím, jak rychle a_k, $b_k \to 0$.

Věta 3.6: **[Derivování trigonometrické řady člen po členu.]** Nechť a_k, b_k jsou libovolná čísla taková, že řada Věta 3.6

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\big(|a_k| + |b_k|\big)$$

konverguje. Potom řada

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cos kx + b_k \sin kx\right] \qquad (1)$$

konverguje absolutně stejnoměrně v $\mathbb{R}$. Navíc: její součet $f(x)$ je $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ a zderivovaná řada

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[-ka_k \sin kx + kb_k \cos kx\right] \qquad (2)$$

konverguje též absolutně stejnoměrně v $\mathbb{R}$ a její součet je $f'(x)$.

Důkaz věty 3.6: ad ($\Box$): $|a_k \cos kx + b_k \sin kx| \leq |a_k| + |b_k|$
$\sum k(|a_k|+|b_k|)$ konverguje $\Rightarrow \sum(|a_k|+|b_k|)$ konverguje, Weierstrass: ($\Box$) konverguje

stejnoměrně v $\mathbb{R}$.
ad $(*)$:

$$|-ka_k \sin kx + kb_k \cos kx| \leq k(|a_k| + |b_k|) \;\Rightarrow\; \text{konverguje stejnoměrně v } \mathbb{R}$$

Dle věty o derivování člen po členu:
$\Rightarrow$ $(\Box)$ konverguje lokálně stejnoměrně (víme víc)
$\Rightarrow$ $(\Box) = (*)$
Otázka: je $f(x)$ spojitá v $\mathbb{R}$ ... součet řady (1), konverguje stejnoměrně a jednotlivé členy jsou spojité.

$\Box$

Poznámka 3.10: Obecněji: $\sum_k k^s(|a_k|+|b_k|)$ konverguje $\Longrightarrow$ součet odpovídající trigonometrické řady je $\mathcal{C}^s(\mathbb{R})$ a lze derivovat s-krát člen po členu.

Věta 3.7: Nechť $f(x) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ je 2π periodická. Potom pro její Fourierovy koeficienty a_k, b_k platí, že řada Věta 3.7

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\big(|a_k| + |b_k|\big)$$

konverguje.

Důkaz věty 3.7:

$$\pi a_k = \int_0^{2\pi} f(x)\cos kx = \underbrace{\left[f(x)\frac{\sin kx}{k}\right]_0^{2\pi}}_{=0,2\pi-\text{periodická}} - \frac{1}{k}\int_0^{2\pi} f'(x)\sin kx =$$

$$= \frac{-1}{k}\left\{\left[f(x)\frac{\sin kx}{k}\right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{1}{k}f''(x)\cos kx}_{\to\pi\hat{a}_k-\text{koef.: } f'(x)} = \right\}$$

$f''(x)$, 2π-periodická $\Rightarrow$ omezená v $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $L^2(0,2\pi)$
Bessel: $\sum(\hat{a}_k)^2$ konverguje. Označme: $\underbrace{\pi a_k = \frac{-1}{k^2}\pi\hat{a}_k}_{(\oplus)}$ a také $\underbrace{ab \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)}_{(\ominus)}$

$$k|a_k| \overset{\oplus}{\leq} \frac{1}{k}|\hat{a}_k| \overset{\ominus}{\leq} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2} + (\hat{a}_k^2)\right) \quad /\sum_k$$

$\Rightarrow$ $\sum k|a_k|$ konverguje, pro b_k analogicky
V.3.6: $\sum k(|a_k|+|b_k|)$ konverguje $\Rightarrow$ $f(x) \in \mathcal{C}^1$, kde $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$

$\Box$

Poznámka 3.11: Funkce $f(x)$ má zobecněnou derivaci, pokud $f(x)$ je spojitá a $f'(x)$ existuje skoro všude.

Věta: (bez důkazu) $\{f(x)$ má zobecněné derivace až do řádu σ včetně a navíc tyto derivace $\in L^2(0,2\pi)\} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} k^{\sigma}\left(|a_k|^2+|b_k|^2\right)$ konverguje

- zobecnění Parsevalovy nerovnosti
- pro $\sigma = 0$ Parsevalova rovnost
- umožňuje definovat funkce s necelým počtem derivací

Věta 3.8: **[Integrování Fourierovy řady člen po členu.]** Nechť $f(x) \in L^1(0, 2\pi)$ je 2π-periodická, nechť a_k, b_k jsou její Fourierovy koeficienty. Potom Věta 3.8

$$\int_0^x f(t)\,dt - \frac{a_0}{2}x = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [\frac{-b_k}{k} \cos kx + \frac{a_k}{k} \sin kx]$$

platí pro $\forall x \in R$. Navíc $A_0 = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}$.

Poznámka 3.12:
• vznikne "formálně" integrováním rovnosti

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos kt + b_k \sin kt\right]$$

- ta však za předpokladů věty obecně nemusí platit.

Důkaz věty 3.8: Idea: hledám Fourierovu řadu k $\int f(x)$, omezení důkazu na případ $f(x)$ po částech spojitá $\Rightarrow F(x)$ po částech $\mathcal{C}^1$
Položme: $F(x) = \int_0^x f(t)dt - \frac{a_0 x}{2}$, tvrdím: $F(x)$ je 2π-periodická

$$F(x+2\pi) = \int_0^{x+2\pi} f(t)dt - \frac{a_0}{2}(x+2\pi) = \int_0^x f(t)dt - \frac{a_0 x}{2} + \frac{2\pi a_0}{2} \underbrace{\int_0^{x+2\pi} f(t)dt}_{\pi a_0} = F(x)$$

počítejme $A_k, B_k \ldots$ Fourierovy koeficienty $F(x)$

$$\pi A_k = \int_0^{2\pi} F(x) \cos kx = \underbrace{\left[F(x)\frac{\sin kx}{k}\right]_0^{2\pi}}_{0} - \frac{1}{k}\int_0^{2\pi} \left(f(x) - \frac{a_0}{2}\right) \sin kx =$$

$$-\frac{1}{k}\underbrace{\int_0^{2\pi} f(x) \sin kx}_{\pi b_k} + \frac{a_0}{2}\underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{\sin kx}{k} dx}_{0} \;\Rightarrow\; A_k = \frac{-b_k}{k}$$

analogicky $B_k = \frac{a_k}{k}$ ($B_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x) \sin kx$)
$F(x)$ je po částech $\mathcal{C}^1$, navíc spojitá v $\mathbb{R} \Rightarrow$

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt + \frac{a_0 x}{2} = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(\underbrace{A_k}_{-\frac{b_k}{k}} \cos kx + \underbrace{B_k}_{\frac{a_k}{k}} \in kx) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Dosaď $x = 0$:

$$0 = \frac{A_0}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}$$

□

Příklad 3.2: $f(x) = x^2$ pro $x \in [-\pi, \pi]$ a 2π-periodická Příklad

$$\mathcal{F}_f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos kx$$

V.3.8:

$$\int_0^x f(t)dt - \frac{\pi^2 x}{3} = \frac{A_0}{2} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^3} \sin kx$$

$x = 0 \Rightarrow A_0 = 0$
$f(t) = t^2$ pro $t \in (-\pi, \pi) \Rightarrow \frac{x^3}{3} - \frac{\pi^2 x}{3} = 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^3} \sin kx \quad \forall x \in (-\pi, \pi)$
Parsevalova rovnost pro obecné l:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) = \frac{2}{l}\int_a^{a+l} |f(x)|^2 dx$$

Pozor!
$|f(x)|^2 \neq f^2(x)$ pro $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

Kapitola 4

Abstraktní Fourierovy řady

Pojmy v kapitole 4: Triginometrická řada, skalární součin, Hilbertův prostor, ortogonální a ortonormální systém, algebraická báze, abstraktní Fourierova řada, úplný systém, hustá množina. Lemma o Youngově nerovnosti, lemma o Hölderově nerovnosti, lemma o Minkovského nerovnosti, věta o Besselově nerovnosti a Parsevalově rovnosti v abstraktním tvaru, věta o ekvivalentním vyjádření úplnosti.

Definice 4.1: **[Trigonometrická řada.]** Nechť $\Omega \subset R^n$ a $1 \leq p \leq \infty$. Definujeme pro $1 \leq p < \infty$ Definice

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to C : \ f \text{ je měřitelná}, \ \int_\Omega |f(x)|^p \, dx < \infty \right\}$$

respektive pro $p = \infty$

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to C : \ f \text{ je měřitelná a } \exists C \text{ tak, že } |f(x)| \leq C \text{ s.v. v } \Omega \ \right\}$$

Terminologie: funkce L^p integrovatelné resp. esenciálně omezené.
Norma na prostoru $L^p(\Omega)$ se definuje

pro $p < \infty$ jako

$$\|f\|_p = \left\{ \int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right\}^{1/p}$$

respektive pro $p = \infty$ jako

$$\|f\|_\infty = \inf \left\{ C > 0 : \ |f(x)| \leq C \text{ s.v. v } \Omega \right\}$$

Poznámka 4.1: Obecně $\|f\|_p = 0$ implikuje jen $f = 0$ s.v. a nikoliv $f = 0$. Řešení: v prostorech L^p považuji funkce, které se rovnají skoro všude, za totožné. (Například Dirichletovu funkci a funkci nulovou.)

Důsledek: nemá smysl hovořit o takových vlastnostech funkce z L^p, které se změní, změním-li funkci na množině míry nula (například hodnota v jednom bodě.) Má smysl hovořit jen o takových vlastnostech, které na takové změně nezáleží (například integrál přes nějakou množinu.)

Lemma 4.1: **[Youngova nerovnost.]** Nechť a, $b \geq 0$ a nechť $1 < p$, $q < \infty$ splňují $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Potom $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$. Lemma 4.1

Důkaz lemmatu 4.1:

$f(x)$ je konkávní: $f(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) \quad \forall \alpha \in (0,1)$
$(\ln x)'' = \frac{-1}{x^2} < 0 \Rightarrow \ln x$ je konkávní v $(0,\infty)$

$$\ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \geq \frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln b^q = \ln a + \ln b = \ln ab$$

Konkávnost: $\alpha = \frac{1}{p}$, $1-\alpha = \frac{1}{q}$
ln je rostoucí $\Rightarrow$ závěr

□

Poznámka 4.2: Speciálně pro $p = q = 2$: $ab \leq a^2/2 + b^2/2$.

Lemma 4.2: **[Hölderova nerovnost.]** Nechť $u(x) \in L^p(\Omega)$, $v(x) \in L^q(\Omega)$, kde $1 \leq p$, $q \leq \infty$ splňují $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (s úmluvou $1/\infty = 0$). Potom $u(x)v(x) \in L^1(\Omega)$ a Lemma 4.2

$$\|uv\|_1 \leq \|u\|_p \|v\|_q\,.$$

Důkaz lemmatu 4.2:
(a): $p = 1$, $q = \infty$ nebo $p = \infty$, $q = 1$ DCV
(b): $1 < p$, $q < \infty$
pokud $\|u\|_p = 0 \Rightarrow u = 0$ s.v. $\Rightarrow uv = 0$ s.v. $\Rightarrow$ závěr triviálně platí
nechť: $\|u\|_p \neq 0$, $\|v\|_q \neq 0$. Položme $a = \frac{|u(x)|}{\|u(x)\|_p}$, $b = \frac{|v(x)|}{\|v(x)\|_q}$
Young:

$$\frac{|u(x)v(x)|}{\|u(x)\|_p\|v(x)\|_q} \leq \frac{1}{p}\frac{|u(x)|^p}{\|u(x)\|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{|v(x)|^q}{\|v(x)\|_q^q} \quad \Big/ \int_\Omega dx$$

$$\frac{1}{\|u\|_p\|v\|_q}\int_\Omega |u(x)v(x)|dx \leq \frac{1}{p}\frac{\|u\|_p^p}{\|u\|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{\|v\|_q^q}{\|v\|_q^q} = 1$$

□

Lemma 4.3: **[Minkowského nerovnost.]** Pro $p \in (1,\infty)$ je Lemma 4.3

$$\|u+v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p.$$

Důkaz lemmatu 4.3:

$$\int_\Omega |u(x)+v(x)|^p dx = \int_\Omega |u(x)+v(x)|^{p-1}|u(x)|dx + \int_\Omega |u(x)+v(x)|^{p-1}|v(x)|dx$$

$$\int_\Omega \underbrace{|u(x)+v(x)|^{p-1}}_{q=\frac{p}{p-1}}\underbrace{|u(x)|}_{p}dx \overset{L.4.2}{\leq} \left\{\int_\Omega \underbrace{|u(x)+v(x)|^p}_{\|u+v\|_p^{p-1}\|u\|_p}\right\}^{\frac{p}{p-1}} \left\{\int_\Omega |u(x)|^{\frac{1}{p}}\right\}^p$$

analogicky druhý integrál: $\leq \|u+v\|_p^{p-1}\|v\|_p$

$$\|u+v\|_p^p = \begin{cases} 0 & \text{zřejmě platí} \\ \neq 0 & \text{zkrátím} \end{cases}$$

celkem:

$$\|u+v\|_p^p \leq \|u+v\|_p^{p-1}(\|u\|_p + \|v\|_p)$$

□

Poznámka 4.3: Důsledek. Trojúhelníková nerovnost pro normu v $L^p(\Omega)$.

Poznámka 4.4:
• V normovaném prostoru X lze hovořit o součtu řady: jsou-li $x_k \in X$, potom $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$, pokud $s_n \to x$ pro $n \to \infty$, kde konvergenci chápu dle normy X, tj.

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists n_0 \in N\big)\big[n \geq n_0 \implies \|s_n - x\|_X < \varepsilon\big]$$

kde $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ jsou částečné součty.
• Je-li X úplný, pak posloupnost má limitu $\iff$ právě když je cauchyovská. Přepsáno pro řadu: $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ konverguje, právě když

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists n_0 \in N\big)\big(\forall n \geq n_0\big)\big(\forall p \in N\big)\left[\left\|\sum_{k=n+1}^{n+p} x_k\right\|_X < \varepsilon\right]$$

(B.C. podmínka konvergence řady v obecném normovaném prostoru.)
• Prostory $L^p(\Omega)$ jsou úplné, viz V. Jarník, Integrální počet II, Věta 199, s. 545. Důsledky: platí v nich Banachova věta o kontrakci, lze používat B.C. podmínku k ověření konvergence.
• prostor $L^2(\Omega)$ má další výhodu: skalární součin.

Definice 4.2: [**Skalární součin.**] Nechť X je lineární vektorový prostor nad $\mathbb{C}$. Zobrazení $x,\, y \mapsto (x,y)$ z $X \times X$ do $\mathbb{C}$ se nazve skalární součin, pokud Definice

(i) je bilineární,

(ii) $(y,x) = \overline{(x,y)}$,

(iii) $(x,x) \geq 0$ a $(x,x) = 0 \iff x = 0$.

Skalární součin přirozeně určuje normu $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$.

Platí tzv. Cauchy-Schwartzova nerovnost

$$|(x,y)| \leq \sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)} = \|x\| \cdot \|y\|$$

Příklad 4.1: Důležitý příklad. Na prostoru $L^2(\Omega)$ lze definovat skalární součin jako Příklad

$$(u,v) := \int_\Omega u(x)\overline{v(x)}\, dx$$

Poznámka 4.5:
• definice je korektní: nevadí neurčenost u, v na množině míry 0.
• integrál konverguje díky Hölderově nerovnosti ($p = q = 2$).
• norma určená tímto skalárním součinem je původní norma v $L^2(\Omega)$.

Definice 4.3: [Hilbertův prostor.] Prostor se skalárním součinem, který je úplný vzhledem normě tímto skalárním součinem určené, se nazývá **Hilbertův prostor**. Definice

Poznámka 4.6:
• R^n, C^n jsou Hilbertovy prostory (konečně-dimenzionální.)
• $L^2(\Omega)$ je Hilbertův prostor (nekonečně-dimenzionální.)
• skalární součin umožní hovořit o kolmosti, úhlech. Hilbertův prostor je proto "podobný" prostoru $\mathbb{R}^n$, i když je obecně nekonečně-dimenzionální.

Úmluva značení 4.1: V dalším textu $\mathcal{H}$ značí Hilbertův prostor, $(\cdot,\cdot)$ odpovídající skalární součin a $\|\cdot\|$ normu. Úmluva

Definice 4.4: [Ortogonální (OG) a ortonormální (ON) systém.] Množina $\{x_n\} \subset H$ se nazve ortogonální (OG) systém, pokud $x_n \neq 0$ a $(x_n, x_m) = 0$ pro $m \neq n$. Pokud navíc $(x_n, x_n) = 1$ (tj. $\|x_n\| = 1$), nazveme systém ortonormální (ON). Definice

Poznámka 4.7:
• $(1,1)$, $(2,-2)$ je OG, není ON v R^2
• $(1,0)$, $(0,1)$ je ON v R^2
• trigonometrický systém $\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots\}$ je OG v $L^2(0,2\pi)$ (Lemma 3.1.)
• $\{x_n\}$ je OG ... $y_n = x_n/\|x_n\|$ je ON, např. $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \dots\}$

Definice 4.5: [Algebraická báze.] Nechť X je vektorový prostor. Množina $\{x_a\}_{a\in A}$ se nazve (algebraická) báze X, pokud každé $x \in X$ lze jediným způsobem napsat jako $x = \sum_{k=1}^{N} c_k x_{a_k}$, kde $c_k \in \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$. Definice

Nechť X je navíc prostor s normou. Spočetná množina $\{x_n\}_{a\in N}$ se nazve Schauderova báze X, pokud každé $x \in X$ lze jediným způsobem napsat jako $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_{a_k}$, kde $c_k \in \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$.

Poznámka 4.8:
• $\dim X < \infty$ ... obě báze existují konečné.
• $\dim X = \infty$ ... algebraická báze může být nespočetná, pohodlnější je spočetná Schauderova báze - místo konečných lin. kombinací ale potřebuji sumu (= spočetná lin. kombinace.)
• klíčová otázka kapitoly: je OG systém Schauderovou bází?

Věta 4.1: Nechť $\{x_n\}$ je OG systém v $\mathcal{H}$, nechť $x \in \mathcal{H}$ je takové, že $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k$, kde $c_k \in C$. Potom $c_k = \frac{(x,x_k)}{(x_k,x_k)}$ pro $\forall k \in \mathbb{N}$. Věta 4.1

Důkaz věty 4.1: označ $s_n = \sum_{k=1}^{n} c_k x_k$, máme $s_n \to x$ v $\mathcal{H}$.
zvol j pevné a nechť BÚNO $n \geq j$:

$$(s_n, x_j) = \Big(\sum_{k=1}^{n} c_k x_k, x_j\Big) = \sum_{k=1}^{n} c_k (x_k, x_j) = c_j (x_j, x_j)$$

pro $n \to \infty$: $(s_n, x_j) \to (x, x_j) = c_j(x_j, x_j)$ hledaný závěr.

□

Definice 4.6: [**Abstraktní Fourierova řada.**] Nechť $\{x_n\} \subset H$ je OG systém, nechť $x \in \mathcal{H}$ je libovolné. Řadu (formální) $\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k$, kde $c_k = \frac{(x,x_k)}{(x_k,x_k)}$, nazvu Fourierovou řadou prvku x vůči systému x_n. Značím F_x. Čísla c_k nazývám Fourierovy koeficienty. Definice

Poznámka 4.9:
- Fourierova řada $f(x) \in L^2(0,2\pi)$ vzhledem k trigonometrickému systému (dle předchozí definice) = Fouerierova řada funkce $f(x)$ ve smyslu předchozí kapitoly.
- je vždy $\mathcal{F}_x = x$? ... klíčová otázka.

Věta 4.2: [**Besselova nerovnost, Parsevalova rovnost - abstraktní tvar.**] Nechť $\{x_n\} \subset H$ je OG systém, nechť $x \in H$ je libovolné a c_k jsou Fourierovy koeficienty. Potom Věta 4.2

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \|x_k\|^2 \leq \|x\|^2 \qquad (1)$$

Speciálně, řada vlevo konverguje. Dále, Fourierova řada $\mathcal{F}_x$ vždy konverguje v H (její součet však není nutně x.)

(2) Situace $F_x = x$ nastává, právě když platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \|x_k\|^2 = \|x\|^2. \qquad (2)$$

Důkaz věty 4.2: označme $s_n = \sum_{k=1}^{n} c_k x_k$, pak

$$\|x - s_n\|^2 = (x - s_n, x - s_n) = \|x\|^2 - \underbrace{(x, s_n)}_{(\alpha)} - \underbrace{(s_n, x)}_{(\beta)} + \underbrace{(s_n, s_n)}_{(\gamma)}$$

$$(\alpha) = \left(x, \sum_{k=1}^{n} c_k x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \bar{c}_k \underbrace{(x, x_k)}_{c_k(x_k,x_k)} = \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \|x_k\|^2$$

podobně $(\beta) = (\alpha)$

$$(\gamma) = (s_n, s_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} c_k x_k, \sum_{j=1}^{n} c_j x_j\right) = \sum_{j,k=1}^{n} c_k \bar{c}_j (x_k, x_j) \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \|x_k\|^2 = (\alpha) = (\beta),$$

kde $(x_k, x_j) = \begin{cases} 0 & k \neq j \\ \|x_k\|^2 & k = j \end{cases}$

celkem: $0 \leq \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \|x_k\|^2 \Rightarrow$ řada v (1) nezáporných čísel má omezené částečné součty $\Rightarrow$ konverguje a platí (1)

dk (1): $\mathcal{F}_x$ konverguje: ověřme B.-C. podmínku:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall p \in \mathbb{N}) : \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k x_k \right\| < \varepsilon \quad (*)$$

$\varepsilon > 0$ dáno, vím, že řada čísel $\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \|x_n\|^2$ konverguje $\Rightarrow$ B.-C.:

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall p \in \mathbb{N}) : \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} |c_k|^2 \|x_k\|^2 \right| < \varepsilon^2 \quad (\oplus)$$

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k x_k \right\|^2 = \Big(\sum_{k=n+1}^{n+p} c_k x_k, \sum_{j=n+1}^{n+p} c_j x_j \Big) = \sum_{j,k} c_k \bar{c}_j \underbrace{(x_k, x_j)}_{=0 \text{ pro } k \neq j} = \sum_{j=n+1}^{n+p} |c_k|^2 \|x_k\|^2$$

$(\oplus) \Rightarrow (*)$, Fourierova řada konverguje.

dk (2): z předchozího:

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} c_k x_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \|x_k\|^2, \quad \Big/ n \to \infty$$

kde $\underbrace{\sum_{k=1}^{n} c_k x_k}_{s_n}$.

Tedy $\mathcal{F}_x = x \Leftrightarrow s_n \to x \Rightarrow (2)$ platí.

□

Poznámka 4.10:
- (1) ... Besselova nerovnost, (2) ... Parsevalova rovnost.
- srovnejte s Větami 3.4., 3.5.
- co je F_x, ne-li x? Lze spočítat: jsou-li $a_k \in C$ libovolná, pak

$$\left\| \sum_{k=1}^{N} a_k x_k - x \right\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^{N} c_k x_k - x \right\|^2 + \sum_{k=1}^{N} |a_k - c_k|^2 \|x_k\|^2$$

kde c_k jsou F.k. prvku x vůči $\{x_n\}$. Tedy: F_x je nejlepší možná aproximace.

Definice 4.7: [**Úplný systém.**] Systém $\{x_n\} \subset H$ se nazve úplný, pokud platí: Definice
je-li $x \in H$ takové, že $(x, x_n) =$ pro $\forall n$, pak nutně $x = 0$.

Názorně: nelze najít nenulové x, kolmé na všechny x_n ... nechybí žádná souřadná osa.

Věta 4.3: [**Ekvivalentní vyjádření úplnosti.**] Nechť $\{x_n\} \subset H$ je OG systém. Věta 4.3
Pak následující výroky jsou ekvivalentní:

(1) $\{x_n\}$ je úplný.

(2) pro $\forall x \in H$ platí Parsevalova rovnost.

(3) pro $\forall x \in H$ platí $F_x = x$.

Důkaz věty 4.3:

(1) $\Rightarrow$ (3): víme, že $\{x_n\}$ je úplný, cíl: $\mathcal{F}_x = x$
$x \in \mathcal{H}$ libovolné, označ $y = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k$ $(= \mathcal{F}_x)$, $c_k = \frac{(x,x_k)}{(x_k,x_k)}$
pro n pevné:

$$(y, x_n) = \Big(\sum_k c_k x_k, x_n\Big) = c_n(x_n, x_n) = (x, x_n)$$

$$(y - x, x_n) = 0 \quad \forall n, \text{ úplnost } \{x_n\} \Rightarrow y - x = 0$$

(3) $\Rightarrow$ (1): víme: $\mathcal{F}_x = x$ $\forall x \in \mathcal{H}$, cíl: úplnost $\{\{x_n\}\}$
Nechť $x \in \mathcal{H}$ takový, že $(x, x_n) = 0$ pro $\forall n$,

$$x = \mathcal{F}_x = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(x, x_k)}{(x_k, x_k)}}_{=0} x_k = \sum 0 x_k = 0$$

(2) $\Leftrightarrow$ (3): již víme (věta 4.2)

□

Příklad 4.2: Důležitý příklad. Trigonometrický systém je úplný v $L^2(0, 2\pi)$. Tj., pokud $f(x) \in L^2(0, 2\pi)$ je kolmá na všechny jeho prvky ($\Longleftrightarrow$ $f(x)$ má všechny Four. koef. nulové), pak nutně $f(x) = 0$ ve smyslu $L^2(0, 2\pi)$, tj. $f(x) = 0$ s.v. (bez důkazu) Příklad

Lemma 4.4: Nechť $f(x)$ je spojitá v $\mathbb{R}$ a 2π-periodická. Jestliže všechny její F.k. jsou nulové, je $f(x) = 0$ všude v $\mathbb{R}$. Lemma 4.4

Důkaz lemmatu 4.4: dle věty 3.8 (integrování F.ř.) platí

$$F(x) - \frac{a_0 x}{2} = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(- \frac{b_k}{k} \cos kx + \frac{a_k}{k} \sin kx \Big) \quad \text{pro } \forall x \in \mathbb{R},$$

kde $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, $a_k, b_k = 0 \Rightarrow F(x) \equiv 0$ v $\mathbb{R} \Rightarrow F'(x) \equiv 0$ v $\mathbb{R}$
$F'(x) = f(x)$ platí všude v $\mathbb{R}$ (f spojité)

□

Poznámka 4.11:
• Srovnej s větou: je-li $f(x) \in \mathcal{C}([a, b])$ a $\int_a^b f(x)\varphi(x) = 0$ pro $\forall \varphi \in C_0^1([a, b])$, je $f(x) = 0$ v $[a, b]$.

Příklad 4.3: Příklad

$$(1) \frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{pro } u = u(x, t),$$

$x \in [0, \pi]$, $t \geq 0$,
$u \ldots$ teplota, $t \ldots$ čas
okrajové podmínky: $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ $\forall t \geq 0$
počáteční podmínky: $u(x, 0) = u_0(x)$ (2)

idea: $u_0(x) = \sin kx$
$u(x,t) = \exp(-ak^2t)\sin kx$ řeší (1), (2) s $u_0 = \sin kx$
pokud $u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$, potom

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \exp(-atk^2)\sin kx \qquad (*)$$

$u_k = -ak^2u$, $u_{xx} = -k^2u$

Tvrzení: Nechť $u_0(x) \in \mathcal{C}_0([0,\pi])$, nechť $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$ konverguje, kde b_k jsou koeficienty sinové řady. Potom funkce u definovaná $(*)$ řeší (1), (2). Navíc $u \in \mathcal{C}([0,\pi]\times[0,\infty]) \cap \mathcal{C}^{\infty}((0,\pi)\times(0,\infty))$

Důkaz tvrzení: splnění rovnice: zřejmé, mohu-li derivovat člen po členu, splnění

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx = u_0(x),$$

řada konverguje stejnoměrně dle Weierstrasse
spojitost u: řada v $(*)$: majoranta $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k| \Rightarrow$ konverguje (absolutně) stejnoměrně v $[0,\pi]\times[0,\infty] \Rightarrow$ spojitost součtu

derivování člen po členu:

$$\frac{\partial}{\partial t}u = \sum_{k=1}^{\infty} -ak^2 b_k \mathrm{e}^{-atk^2}\sin kx$$

$x \in (0,\pi)$, $t \geq \tau > 0$: $|ak^2 b_k \mathrm{e}^{-atk^2}\sin kx| \leq ak^2|b_k|\mathrm{e}^{-a\tau k^2}$
$|b_k|$ omezená (prvky konvergentní řady) $\Rightarrow \sum$ konverguje

srovnej: ODR: $u_t = Au$, $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $A \ldots$ matice

(λ_k, v_k) - vlastní dvojice A, obecné řešení $u = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\lambda_k t} v_k$

$a\Delta u \ldots \sin kx$ vlastní funkce
$(\sin kx)'' = -k^2 \sin kx$, $-k^2 a$ - vlastní čísla
- stejná myšlenka

Poznámka 4.12: Opakování. Množina A je spočetná, existuje-li vzájemně jednoznačné zobrazení A na $\mathbb{N}$ (značení: $A \approx \mathbb{N}$.)

Názorně: prvky A lze očíslovat přirozenými čísly. Příklady: $\mathbb{N}$, $\mathcal{Z}$, $\mathbb{Q}$ jsou spočetné, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ nespočetné.

Definice 4.8: [Hustá množina. Separabilní prostor.] Nechť X je prostor s normou. Množina M se nazve hustá v X, pokud Definice

$$\big(\forall x \in X\big)\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists y \in M\big)\big[\|x-y\|_X < \varepsilon\big]$$

Názorně: každý prvek X má libovolně blízko prvek z M.

Prostor X se nazve separabilní, pokud existuje spočetná M hustá v X.

Příklad 4.4: Příklad

- $\mathbb{R}$ je separabilní: $M = \mathbb{Q}$.
- $\mathbb{C}$ je separabilní: $M = \{z \in \mathbb{C}: \ z = a + ib, \ a, b \in \mathbb{Q}\}$.
- H je Hilbertův prostor a existuje spočetný úplný OG systém $\{x_n\} \subset H \implies H$ je separabilní.
- speciálně: $L^2(0, 2\pi)$ je separabilní, obecněji: $L^p(\Omega)$ je separabilní pro $\forall p \in [1, \infty)$, ale $L^\infty(\Omega)$ není separabilní.
- pro $f(x) : (0,1) \to C$ označ spt $f = \{x \in (0,1) : \ f(x) \neq 0\}$ (nosič funkce). Definuj

$$\mathcal{H} = \Big\{ f(x) : (0,1) \to \mathbb{C} : \sum_{x \in \operatorname{spt} f} |f(x)|^2 < \infty \Big\}$$

Prostor $\mathcal{H}$ se skalárním součinem

$$(f, g) := \sum_{x \in \operatorname{spt} f \cap \operatorname{spt} g} f(x)\overline{g(x)}$$

je Hilbertův prostor, který není separabilní. Množina $\{e^a\}_{a \in (0,1)}$, kde $e^a(x) = 1$ pro $x = a$ a 0 jinde v něm tvoří úplný, ale nespočetný OG systém.

- množina $\{e^a\}$ z předchozího bodu je nespočetná algebraická báze nikoliv $\mathcal{H}$, ale menšího prostoru $\mathcal{H}_0$ funkcí s konečným nosičem. Nosič funkcí z $\mathcal{H}$ je obecně nejvýše spočetný. Dimenze prostoru $\mathcal{H}$ (=počet prvků alg. báze) je striktně větší než dimenze $\mathcal{H}_0$, která je kontinuum (=počet prvků $\mathbb{R}$.)

Kapitola 5

Komplexní analýza

Pojmy v kapitole 5: Komplexní čísla, Gaussova rovina, komplexní funkce, komplexní mocnina, komplexní derivace, holomorfní funkce, křivka v Ω, Jordanova křivka, Laurentova řada, reziduum funkce, izolovaná singularita, hromadný bod. Věta o Cauchy-Riemannových podmínkách, věta o základních vlastnostech křivkového integrálu v $\mathbb{C}$, Cauchyho věta, lemma o velké půlkružnici, lemma o malé půlkružnici, Cauchyho vzorec, charakterizace polynomů v $\mathbb{C}$, Liouvilleova věta, základní věta algebry, věta o konvergenci Laurentovy řady, věta o existenci Laurentova rozvoje, Taylorův rozvoj, reziduová věta, výpočet rezidua, charakterizace izolované singularity, charakterizace pólu, charakterizace podstatné singularity, věta o jednoznačnosti.

Definice 5.1: **[Komplexní čísla.]** Definice

$$\mathbb{C} = \left\{ z = x + iy : \ x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

kde $i^2 = -1$ (imaginární jednotka), $Re(z) = x$ (reálná část), $Im(z) = y$ (imaginární část), $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (absolutní hodnota), $\overline{z} = x - iy$ (číslo komplexně sdružené).

Poznámka 5.1: Ztotožnění: $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, $z = x + iy \leftrightarrow (x, y)$. Shoduje se i $|z| = \|(x, y)\|_2$.

Definice 5.2: **[Gaussova rovina.]** $\mathbb{S} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Terminologie: $\mathbb{C}$...otevřená Gaussova rovina, $\mathbb{S}$...uzavřená Gaussova rovina, ∞...komplexní nekonečno. Definice

Početní pravidla:
- $a \pm \infty = \infty$ pro $\forall a \in \mathbb{C}$
- $a \cdot \infty = \infty$ pro $\forall a \in \mathbb{S} \setminus \{0\}$
- $a/\infty = \infty$ pro $\forall a \in \mathbb{C}$
- $a/0 = \infty$ pro $\forall a \in \mathbb{S} \setminus \{0\}$

Nedefinováno zůstává: $0 \cdot \infty$, $0/0$, ∞/∞, $\infty \pm \infty$.

Příklad 5.1: [Komplexní funkce.] Příklad
- polynomy, racionální funkce. Pozn.: dodefinováním $p(\infty) = \infty$ je polynom spojitá funkce v $\mathbb{S}$.
- e^z, $\sin z$, $\cos z$ - definovány mocninnou řadou, která (absolutně) konverguje pro

$\forall z \in \mathbb{C}$. Klíčový vztah:

$$\exp(a+ib) = \exp(a)[\cos b + i \sin b]$$

Definice 5.3: Pro $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definujeme Definice

$$\begin{aligned} \log z &= \big\{\zeta \in \mathbb{C}: \ \exp\zeta = z\big\} \\ \arg z &= \big\{\beta \in \mathbb{R}: \ z = |z|\exp(i\beta)\big\} \\ \operatorname{Log} z &= \big\{\zeta \in \log z: \ Im(\zeta) \in (-\pi, \pi]\big\} \\ \operatorname{Arg} z &= \big\{\beta \in \arg z: \ \beta \in (-\pi, \pi]\big\} \end{aligned}$$

Poznámka 5.2:
• log, arg nejsou to funkce v klasickém smyslu: číslu je přiřazena množina. Např.: $\log 1 = \{2k\pi i: \ k \in \mathbb{Z}\}$.
• Log, Arg funkce jsou: číslu je přiřazeno právě jedno číslo.
• platí vztahy (ln je klasický reálný logaritmus):

$$\begin{aligned} \zeta \in \log z &\iff Re\zeta = \ln|z| \ \& \ Im\zeta \in \arg z \\ \operatorname{Log} z &= \ln|z| + i \operatorname{Arg} z \end{aligned}$$

Příklad 5.2: Příklad

- $\log 1 = \{\xi \in \mathbb{C} : \mathrm{e}^{\xi} = 1\}$
- $\mathrm{e}^{\alpha + i\beta} = \mathrm{e}^{\alpha}\mathrm{e}^{i\beta} = 1 \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad |\mathrm{e}^{\alpha}| = 1 \Rightarrow \alpha = 0$
- $\mathrm{e}^{i\beta} = \cos\beta + i\sin\beta = 1$
  $\cos\beta = 1$, $\sin\beta = 0 \Rightarrow \beta = 2k\pi$, $k \in \mathcal{Z}$
- $\log 1 = \{2k\pi i, k \in \mathcal{Z}\}$
- $\arg 1 = \{2k\pi, k \in \mathcal{Z}\}$

Definice 5.4: **[Komplexní mocnina.]** Pro $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $a \in \mathbb{C}$ definujeme Definice

$$m_a(z) = \big\{ \exp(a\zeta): \ \zeta \in \log z \big\}$$

Definice 5.5: **[Komplexní derivace.]** Pro $z_0 \in \mathbb{C}$, $f(z): U(z_0) \to \mathbb{C}$ definujeme Definice

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Limitu chápu v $\mathbb{C}$ a musí být vlastní. Ekvivalentní definice: $f'(z_0) = A$ právě když

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + Ah + r(h)$$

kde $r(h) = o(|h|)$ pro $h \to 0$.

Značím $f^{(1)}(z) = f'(z)$ a indukcí $f^{(n+1)}(z) = [f^{(n)}(z)]'$.

Věta 5.1: Platí: Věta 5.1

(1) $(f \pm g)'(z) = f'(z) \pm g'(z)$

(2) $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$

(3) $(f/g)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}$ pokud $g(z) \neq 0$

(4) $(f_{-1})'(w) = 1/f'(f_{-1}(w))$, je-li $f(z)$ prostá a $f'(z) \neq 0$

(5) $(f \circ g)'(z) = f'(g(z))g'(z)$

Důkaz věty 5.1: vynecháváme, neboť je stejný jako v $\mathbb{R}$

□

Úmluva značení 5.1: Ω je otevřená část $\mathbb{C}$. Úmluva

Definice 5.6: **[Holomorfní funkce.]** Funkce $f(z) : \Omega \to \mathbb{C}$ se nazve holomorfní v Ω, pokud $f'(z)$ existuje všude v Ω. Značíme $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Definice

Příklad 5.3: Příklad
• polynom $P(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$
• racionální funkce $R(z) = P(z)/Q(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{z : \ Q(z) = 0\})$
• e^z, $\sin z$, $\cos z \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ (lze derivovat člen po členu.)
• Věta 5.1. $\Longrightarrow$ sčítáním, odčítáním, násobením, dělením, invertováním a skládáním holomorfních funkcí vzniká funkce holomorfní (všude, kde má smysl)

Poznámka 5.3: Ztotožnění $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ ... ztotožnění $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ s funkcí $\tilde{f}(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, kde $z = x + iy$ a $\tilde{f} = (f_1, f_2) = (Re\ f, Im\ f)$.

Příklad 5.4: $f(z) = z^2$ odpovídá $\tilde{f}(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$. Příklad

Věta 5.2: **[Cauchy-Riemannovy podmínky.]** Nechť $f(z) : U(z_0) \to \mathbb{C}$, kde $z_0 \in \mathbb{C}$ je dána. Nechť $\tilde{f} = (f_1, f_2)(x, y) : U((x_0, y_0)) \to \mathbb{R}^2$ jí odpovídá dle ztotožnění $\mathbb{C}$ s $\mathbb{R}^2$, kde $z_0 = x_0 + iy_0$. Potom následující výroky jsou ekvivalentní: Věta 5.2

(1) existuje $f'(z)$ v bodě z_0

(2) funkce $\tilde{f}$ má v bodě (x_0, y_0) totální diferenciál a navíc v (x_0, y_0) platí tzv. Cauchy-Riemannovy podmínky:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y} \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}$$

Navíc platí:

$$f'(z_0) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} - i\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)_{(x_0,y_0)} = \left(\frac{\partial f_2}{\partial y} + i\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)_{(x_0,y_0)}$$

Důkaz věty 5.2: označ $f'(z_0) = A \in \mathbb{C}$, $A = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$
(1) $\Leftrightarrow f(z_0 + h) = f(z_0) + Ah + z(h)$ $\qquad (\alpha)$

rozděl (α) na Re, Im, přejdi k $\tilde{f} = (f_1, f_2)$; $h = \xi + i\eta$
$r = r_1((\xi, \eta)) + ir_2(\xi, \eta)$
$A \cdot h = (a + ib)(\xi + i\eta) = a\xi - b\eta + i(b\xi + a\eta)$
$f_1(x_0 + \xi, y_0 + \eta) = f_1(x_0, y_0) + a\xi - b\eta + r_1(\xi, \eta)$
$f_2(x_0 + \xi, y_0 + \eta) = f_2(x_0, y_0) + b\xi + a\eta + r_2(\xi, \eta)$ (β)
pozoruji $r = o(|h|) \Leftrightarrow r_1, r_2 = o(\|\xi, \eta\|)$

$$(\beta) \Leftrightarrow \text{existuje } D\tilde{f}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \text{ kde}$$

$$D\tilde{f}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} |_{x_0, y_0}$$

Odtud: Cauchy-Riemannovy podmínky:
navíc $f'(z_0) = A = a + ib \Rightarrow$ (3)
úvahu lze obrátit:

$$D\tilde{f}(x_0, y_0) \overset{C.R.}{=} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

(β) $\Rightarrow$ (α) platí s $A = a + ib \Rightarrow f'(z_0) = A$

□

Poznámka 5.4:
• Názorně: $\exists f'(z) \Leftrightarrow \exists D\tilde{f}$ a navíc $D\tilde{f}$ je matice určitého typu
• holomorfnost (=existence $f'(z)$) je mnohem restriktivnější, než se zdá na první pohled.
• funkce $f(z) = Rez$ není holomorfní: nesplní C.R. podmínky.

Příklad 5.5: Funkce $f(z) = Rez$ není holomorfní: Příklad

$$\tilde{f}(x, y) = (x, 0)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 1 \neq 0 = \frac{\partial f_2}{\partial y} \quad \text{spor s C.-R. podmínkou}$$

Podobně: $Im\ z, |z|, \bar{z}$ nejsou holomorfní.

Věta 5.3: Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(\Omega)$ a $f'(z) \neq 0$ v Ω. Potom systémy křivek $\mathcal{I} = \{Ref = c\}_{c \in \mathbb{R}}$ a $\mathcal{J} = \{Imf = d\}_{d \in \mathbb{R}}$ jsou navzájem ortogonální. Tj., pokud křivka $\varphi \in \mathcal{I}$ protíná křivku $\psi \in \mathcal{J}$, tak jedině pod pravým úhlem. Věta 5.3

Příklad 5.6: $f(z) = z^2$ Příklad
$(x, y) \to (x^2 - y^2, 2xy)$
$\mathcal{I} = \{x^2 - y^2 = c\}$,
$\mathcal{J} = \{2xy = \alpha\}$
$f'(z) = 2z$, v 0 degeneruje

Důkaz věty 5.3: $\varphi : \{Re\ f = c\} = \{f_1(x, y) = c\}$ ztotožnění $\mathbb{R}^2$ s $\mathbb{C}$
$\nabla f_1(x, y) = (Re\ f'(z), -Im\ f'(z))$ dle (3)
$\neq 0$, neboť $f'(z) \neq 0 \Rightarrow \varphi$ lze explicitně psát jako funkci x nebo y
$\nabla f_1 \perp$ tečna φ

podobně $\nabla f_2 \perp$ tečna ψ; stačí

$$0 = (\nabla f_1, \nabla f_2) = \frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial y}\frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial f_2}{\partial y} = 0$$

$\square$

Definice 5.7: **[Křivka v Ω.]** Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$. Křivkou v Ω nazýváme funkci $\varphi(t) : [a, b] \to \Omega$, která je spojitá, po částech C^1 a $\varphi'(t) \neq 0$ až na konečně výjimek. Definice

Geometrický obraz $\langle\varphi\rangle$, počáteční bod p.b. φ, koncový bod k.b. φ, uzavřená, jednoduchá a jednoduchá uzavřená křivka se definují analogicky jako u křivek v $\mathbb{R}^n$. Taktéž křivka opačná $\ominus\varphi$ a součet křivek $\varphi \oplus \psi$.

Pro funkci $f(z) : \langle\varphi\rangle \to \mathbb{C}$ definuji křivkový integrál jako

$$\int_\varphi f(z)\, dz = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt$$

kde integrál vpravo chápu jako Lebesgueův integrál komplexní funkce.

Dále definuji délku křivky

$$L(\varphi) = \int_a^b |\varphi'(t)|\, dt\,.$$

Věta 5.4: **[Základní vlastnosti křivkového integrálu v $\mathbb{C}$.]** (1) Věta 5.4

$$\int_\varphi [f(z) + g(z)]\, dz = \int_\varphi f(z)\, dz + \int_\varphi g(z)\, dz$$

(2)

$$\int_{\ominus\varphi} f(z)\, dz = -\int_\varphi f(z)\, dz\,, \qquad \int_{\varphi\oplus\psi} f(z)\, dz = \int_\varphi f(z)\, dz + \int_\psi f(z)\, dz$$

(3) Jestliže $F'(z) = f(z)$ na $\Omega \supset \langle\varphi\rangle$, pak

$$\int_\varphi f(z)\, dz = F(k.b.\varphi) - F(p.b.\varphi)\,, \quad \text{speciálně} \quad \int_\varphi dz = k.b.\varphi - p.b.\varphi$$

(4)

$$\left|\int_\varphi f(z)\, dz\right| \leq L(\varphi) \sup_{z\in\langle\varphi\rangle} |f(z)|$$

Důkaz věty 5.4:

(1), (2) D.CV.

(3)

$$\int_\varphi f(z)dz = \int_a^b \underbrace{f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)}_{\frac{d}{dt}F(\varphi(t))} = [F(\varphi(t))]_a^b = F(k.b.\varphi) - F(p.b.\varphi)$$

speciálně $f = 1$, $F = z$

(4)

$$\Big| \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \Big| \le \int_a^b |f(\varphi(t))||\varphi'(t)|dt,$$

kde $f(\varphi(t)) \le \sup_{z\in\langle\varphi\rangle}$

(5)

$$\int_\varphi f(z)dz = \int_a^b f(t) \cdot 1dt$$

$\square$

Poznámka 5.5: V $\mathbb{C}$ neplatí Rolleova věta:
$\varphi(t) = \mathrm{e}^{it} : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$
$\varphi(0) = \varphi(2\pi) = 1$, $\varphi'(t)$ existuje v $(0, 2\pi)$,
$\varphi(t)$ je spojitá, ale $\varphi'(t) = i\mathrm{e}^{it} \ne 0$ v $(0, 2\pi)$

Příklad 5.7: Pro $n \in \mathcal{Z}$, $\zeta \in \mathbb{C}$ a křivku $C = \zeta + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ je Příklad

$$\int_C (z-\zeta)^n \, dz = \begin{cases} 0 & n \ne -1 \\ 2\pi i & n = -1 \end{cases}$$

Definice 5.8: [Jordanova křivka.] Jednoduchá uzavřená křivka φ v $\mathbb{C}$ se nazývá Jordanova. Lze psát $\mathbb{C} = \operatorname{int}\varphi \cup \langle\varphi\rangle \cup \operatorname{ext}\varphi$, kde $\operatorname{int}\varphi$ je oblast uvnitř a $\operatorname{ext}\varphi$ oblast vně křivky. Definice

Jordanova křivka je kladně (záporně) orientovaná, pokud obíhá kolem $\operatorname{int}\varphi$ proti směru (ve směru) hodinových ručiček.

Množina $\Omega \subset \mathbb{C}$ se nazve jednoduše souvislá, pokud (i) je souvislá a (ii) je-li φ Jordanova křivka v Ω, je $int\,\varphi \subset \Omega$.

(Srovnejte s definicemi v R^2.)

Věta 5.5: [Cauchyho věta.] Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(\Omega)$ a φ je Jordanova křivka v Ω taková, že $int\,\varphi \subset \Omega$. Potom Věta 5.5

$$\int_\varphi f(z)\, dz = 0\,.$$

Důkaz věty 5.5: idea: ztotožnění $\mathbb{C}$ s $\mathbb{R}^2$ + Greenova věta: Ψ je jednoduchá uzavřená křivka v $\mathbb{R}^2$, $M \subset R^2$, $\langle\Psi\rangle = \partial M$, Ψ-kladně orientovaná

$$\int_\Psi F \cdot d\psi = \int_M \operatorname{rot} F \, dxdy,$$

kde $F : M \to \mathbb{R}^2$ a rot $F = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$.
Položme $f = f_1 + if_2$, $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$. Potom

$$\int_\varphi f(z)\,dz = \int_a^b [(f_1 + if_2) \circ \varphi]\,(\varphi_1' + i\varphi_2')\,dt =$$

$$= \int_a^b (f_1 \circ \varphi) \cdot \varphi_1' - (f_2 \circ \varphi) \cdot \varphi_2' + i \int_a^b (f_2 \circ \varphi) \cdot \varphi_1' - (f_1 \circ \varphi) \cdot \varphi_2' = \dots$$

označme $\tilde{\varphi} : M \to \mathbb{R}^2$, $M \dots int\varphi$, $\tilde{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2)$

$$\dots = \int_{\tilde{\varphi}} F \cdot d\tilde{\varphi} + i \int_{\tilde{\varphi}} H \cdot d\tilde{\varphi} = \dots,$$

kde $F = (f_1, -f_2)$, $H = (f_2, f_1)$
rot $F = -\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \overset{C.R.}{=} 0$
rot $H = \frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0$,
$f(z) \in \mathcal{H}(\Omega)$

$$\dots = \int_M \text{rot } F \cdot d\lambda_2 + \int_M \text{rot } H \cdot d\lambda_2 = 0$$

$\square$

Poznámka 5.6:
• předpoklad $int\,\varphi \subset \Omega$ (zaručující $f(z) \in \mathcal{H}(int\,\varphi)$) je podstatný: viz integraci $1/z$ kolem počátku.
• v jednoduše souvislé Ω je z definice splněn.

Příklad 5.8: Spočítej Příklad

$$(\mathcal{N}) \int_0^{\int} \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{\sin x}{x}\,dx = I$$

Polož $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$, integruj přes $\Gamma = \varphi_1 \oplus \varphi_2 \oplus \varphi_3 \ominus \varphi_4$,
kde $\varphi_1 = t$, $t \in [r, R]$
$\varphi_2 = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$
$\varphi_3 = t$, $t \in [-R, -r]$
$\varphi_4 = re^{it}$, $t \in [0, \pi]$
Γ je Jordanova křivka, $f(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \supset int\,\Gamma$

$$0 = \int_\Gamma = \int_{\varphi_1} + \int_{\varphi_2} + \int_{\varphi_3} - \int_{\varphi_4}, \qquad \text{položme } I(r,R) = (-R,-r) \cup (r,R)$$

Platí

$$\int_{\varphi_1} + \int_{\varphi_3} = \int_{(-R,-r)} \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int_{(R,r)} \frac{e^{ix}}{x}\,dx = i \int_{I(R,r)} \frac{\sin}{x}\,dx = 2i \int_r^R \frac{\sin x}{x}\,dx$$

Víme, že $\frac{e^{ix}}{x}$ je lichá funkce, tedy zůstane z ní jen imaginární část.
Pro $r \to 0_+$, $R \to \infty$: $\int_{\varphi_1} + \int_{f_3} \to 2iI$

... přerušení výpočtu ...

Lemma 5.1: **[O velké půlkružnici.]** Nechť $f(z)$ je spojitá v $\Omega = \{z \in C : Im\,(z) > 0\}$ a splňuje zde pro $|z| \geq R_0$ odhad $|f(z)| \leq K/|z|$. Nechť C_R je křivka $\varphi(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$. Potom Lemma 5.1

$$\int_{C_R} f(z)e^{iz}\,dz \to 0 \qquad \text{pro } R \to +\infty\,.$$

Důkaz lemmatu 5.1:

$$\left|\int_{c_R} f(z)\mathrm{e}^{iz}\,dz\right| \leq \int_0^\pi \left|f(R\,e^{it})e^{iR\,t}iR\,e^{it}\right|\,dt \leq \sup_{|z|=R, Imz>0} |f(z)|\,R\int_0^\pi \mathrm{e}^{-R\sin t}\,dt \leq \ldots$$

platí $e^\xi = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}\,\xi}(\cos \mathrm{Im}\xi + i\sin \mathrm{Im}\xi) \Rightarrow |e^\xi| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}\xi}$
Tedy: $\mathrm{Re}\{iR\,e^{it}\} = \mathrm{Re}\{iR(\cos t + i\sin t)\} = -R\sin t$

$$\leq K\int_0^\pi \mathrm{e}^{-R\sin t}\,dt$$

Lebesgueova věta: pozoruji $\sin t > 0$ pro $\forall t \in (0, \pi)$
$\Rightarrow \mathrm{e}^{-R\sin t} \to 0$ pro $\forall t$
$|\mathrm{e}^{-R\sin t}| \leq 1 = g(t) \in L^1(0, \pi)$

Lebesgue: $\int_0^\pi \mathrm{e}^{-R\sin t}\,dt \to 0$ pro $R \to \infty$

□

Poznámka 5.7: Předpoklad $|f(z)| \leq K/|z|$ pro $|z| \geq R_0$ je splněn např. pokud $f(z) = P(z)/Q(z)$, kde P, Q jsou polynomy a $st\,Q > st\,P$.

Lemma 5.2: **[O malé půlkružnici.]** Nechť $f(z)$ je spojitá v $P(z_0)$ a nechť $f(z)(z - z_0) \to A \in C$ pro $z \to z_0$. Nechť C_r je křivka $\varphi(t) = re^{it}$, $t \in [\alpha, \beta]$. Potom Lemma 5.2

$$\int_{C_r} f(z)\,dz \to iA(\beta - \alpha) \qquad \text{pro } r \to 0+\ .$$

Důkaz lemmatu 5.2:

$$\int_{c_r} f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(z_0 + \mathrm{r}e^{it})i\mathrm{r}e^{it}\,dt = \underbrace{i\int_\alpha^\beta A\,dt}_{iA(\beta-\alpha)} + i\int_\alpha^\beta \left[f\,\underbrace{(z_0 + \mathrm{r}e^{it})}_{z}\,\underbrace{\mathrm{r}e^{it}}_{z-z_0} - A\right]\,dt,$$

kde $|z - z_0| = r$
dle předpokladu: $[\ldots] \to 0$ pro $r \to 0_+$
Záměna limity a integrálu: $f(z)(z - z_0) \to A \Rightarrow f(z)(z - z_0)| \leq 2|A|$ pro $|z| < r_0 \Rightarrow$ $[\ldots] \leq 3|A|$ pro $|z| < r_0$, kde $3|A| = g(t) \in L^1(\alpha, \beta)$

Jiný důkaz: $[\ldots] \rightrightarrows 0$ v $[\alpha, \beta]$ pro $r \to 0_+ \Rightarrow$ záměna limity a integrálu

□

Poznámka 5.8: Předpoklad $f(z)(z-z_0) \to A \in C$ pro $z \to z_0$ je splněn např. pokud $f(z) = g(z)/(z-z_0)$, kde $g(z)$ je spojitá v z_0 a $g(z_0) = A$.

Příklad 5.9: Pokračování předchozího příkladu: Příklad

$$\int_{\varphi_2} \frac{e^{iz}}{z}\, dz \to 0 \quad \text{dle Lemmatu 5.1,} \quad f(z) = \frac{1}{z}$$

$$\int_{\varphi_4} \frac{e^{iz}}{z}\, dz \to i\pi, \qquad \text{dle Lemmatu 5.2, } z_0 = 0, f(z) = e^{iz}/z, \alpha = 0, \beta = \pi$$

$$0 = \int_{\varphi_1} + \underbrace{\int_{\varphi_2}}_{\to 0} + \int_{\varphi_3} - \underbrace{\int_{\varphi_4}}_{-i\pi} = 2iI$$

Pošleme $r \to 0_+$, $R \to +\infty$

Závěr: $(\mathcal{N}) \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$

Poznámka 5.9: $f(x) : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R} \ldots$ platí: $f'(x) = 0$ v $I \Rightarrow f(x)$ je konstantní. Dk: věta o střední hodnotě.

Lemma 5.3: Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast (tj. otevřená, souvislá množina), nechť $F(z) : \Omega \to \mathbb{C}$ splňuje $F'(z) = 0$ v Ω. Potom $F(z)$ je konstantní v Ω. Lemma 5.3

Důkaz lemmatu 5.3: Zvol z_1, $z_2 \in \Omega$ libovolně, Ω souvislá $\Rightarrow$ existuje φ křivka v Ω, p.b.$\varphi = z_1$, k.b.$\varphi = z_2$.
$F(z_2) - F(z_1) \overset{*)}{=} \int_\varphi F'(z)\, dz = \int_\varphi 0\, dz$, tedy $F(z)$ je konst.
*) vlastnosti křivkového integrálu

□

Poznámka 5.10:
- Srovnej s tvrzením: $f(x) : I \to \mathbb{R}$, kde $I \subset \mathbb{R}$ je interval, a $f'(x) = 0$ v $I \implies f(x)$ je konstantní v I.
- zobecnění: $F^{(n+1)}(z) = 0 \implies F(z)$ je polynom stupně $\leq n$.

Věta 5.6: **[Cauchyho vzorec.]** Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(\Omega)$, nechť φ je kladně orientovaná Jordanova křivka v Ω a $int\, \varphi \subset \Omega$. Potom Věta 5.6

(1) Pro $\forall \zeta \in int\, \varphi$ platí

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{f(z)}{z - \zeta}\, dz\,.$$

(2) $f(z)$ je v $int\, \varphi$ nekonečně krát derivovatelná a pro $\forall \zeta \in int\, \varphi$ platí

$$f^{(n)}(\zeta) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\varphi \frac{f(z)}{(z-\zeta)^{n+1}}\, dz\,.$$

Důkaz věty 5.6: **<u>(1):</u>** zvol $\xi \in int\varphi$ pevně, libovolně, označ $\gamma_\varepsilon = \xi + \varepsilon e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ tvrdím:

$$\int_\varphi \frac{f(z)}{z-\xi}\, dz = \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-\xi}\, dz \quad \text{pro } \forall \varepsilon \text{ malé} \qquad (+)$$

pomocné křivky $\Psi_1 + \Psi_2$; rozděl $\varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_2$, $\gamma_\varepsilon = \gamma_\varepsilon^1 + \gamma_\varepsilon^2$
definuji: $\Gamma_1 = \varphi_1 \oplus \Psi_2 \ominus \gamma_\varepsilon^1 \ominus \Psi_1$
$\Gamma_2 = \varphi_2 \oplus \Psi_1 \ominus \gamma_\varepsilon^2 \ominus \Psi_2$
Pozorování: Γ_1, Γ_2 kladně orientované Jordanovy křivky, navíc $\frac{f(z)}{z-\xi} = g(z)$ je holomorfní v $\Omega \setminus \{\xi\}$, kde $\Omega \setminus \{\xi\} \supset int\,\Gamma_1, int\,\Gamma_2$

Cauchyova věta: $\Rightarrow$

$$0 = \int_{\Gamma_1} g(z)\,dz + \int_{\Gamma_2} g(z)\,dz = \int_{\varphi_1} + \int_{\psi_2} - \int_{\gamma_\varepsilon^1} - \int_{\psi_1} + \int_{\varphi_2} + \int_{\psi_1} - \int_{\gamma_\varepsilon^2} - \int_{\psi_2} =$$

$$= \int_{\varphi} g(z)\,dz - \int_{\gamma_2} g(z)\,dz, \qquad \text{tj } (+) \text{ platí.}$$

idea: $\varepsilon > 0$ malé:

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-\xi}\,dz = f(\xi) \underbrace{\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-\xi}\,dz}_{2\pi i} + \underbrace{\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z)-f(\xi)}{z-\xi}\,dz}_{I(\varepsilon)}$$

$\varepsilon \to 0$, $z \in \gamma_\varepsilon \to \xi$: $\frac{f(z)-f(\xi)}{z-\xi} \to f'(\xi) \in \mathbb{C}$;
$\left|\frac{f(z)-f(\xi)}{z-\xi}\right| \leq K$ pro $\varepsilon < \varepsilon_0$
$|I(\varepsilon)| \leq KL(\gamma_\varepsilon) = K2\pi\varepsilon$
klíčové pozorování:

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-\xi} = \begin{cases} \int_\varphi \frac{f(z)}{z-\xi} & \forall\varepsilon > 0 \\ 2\pi i f(\xi) + I(\varepsilon) & \forall\varepsilon > 0 \end{cases}$$

ε libovolně malé $\Rightarrow I(\varepsilon) = 0$ (nezávisí na ε) a (1) platí

(2): omezme se na $\xi \in \mathcal{U}(z_0, \delta) \subset int\varphi$ tak, že vzdálenost $\mathcal{U}(z_0, \delta)$ od $\varphi \geq \Delta \geq 0$ (ξ vyleze z funkce)
víme dle (1): $f(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{f(z)}{z-\xi}\,dz$ pro $\forall \xi \in \mathcal{U}(z_0, \delta)$
derivuji (PS) dle ξ: zaměním $\frac{\partial}{\partial\xi}$ a $\int_\varphi$:

$$\frac{d}{d\xi}[f(z)(z-\xi)^{-1}] = f(z)(z-\xi)^{-2}$$

$$\frac{d^n}{d\xi^n}[f(z)(z-\xi)^{-1}] = (-1)(-2)\ldots(-n)(-1)^n f(z)(z-\xi)^{-(n+1)} = n! f(z)(z-\xi)^{-(n+1)}$$

Tedy $f^{(n)}(\xi) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\varphi \frac{f(t)}{(z-\xi)^{n+1}}\,dz$
Záměna $\frac{d}{d\xi}$ a $\int_\varphi$: majoranta: $|f(z)|$ spojitá na $\langle\varphi\rangle \ldots$ kompakt $\Rightarrow |f(z)| \leq K$
$\xi \in \mathcal{U}(z_0, \delta) \Rightarrow |z - \xi| \geq \Delta$
$\left|\frac{f(z)}{(z-\xi)^{n-1}}\right| \leq \frac{K}{\Delta^{n-1}} \ldots$ integrovatelná $\int_\varphi$

$\square$

Poznámka 5.11:
- holomorfní funkce je v $int\,\varphi$ jednoznačně určena hodnotami na $\langle\varphi\rangle$.
- holomorfní funkce je nekonečně diferencovatelná.

Věta 5.7: **[Charakterizace polynomů v $\mathbb{C}$.]** Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Potom $f(z)$ je polynom stupně $\leq n$ právě když Věta 5.7

$$\frac{f(z)}{z^{n+1}} \to 0 \quad \text{pro} \quad z \to \infty\,.$$

Důkaz věty 5.7:
"$\Rightarrow$ " zřejmé
"$\Leftarrow$ " dle poznámky za Lemmatem 5.3 stačí: (1) $\Rightarrow f^{(n+1)}(z) = 0$ pro $\forall z \in \mathbb{C}$
Zvol $\xi \in \mathbb{C}$ libovolně, $\varphi(t) = Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $R > 0$ velké
Věta 5.6: $f^{(n+1)}(\xi) = \frac{(n+1)!}{2\pi i} \underbrace{\int_\varphi \frac{f(z)}{(z-\xi)^{n+2}}\,dz}_{I}$

$$|I| \leq \sup_{z\in\langle\varphi\rangle} \left|\frac{f(z)}{(z-\xi)^{n+1}}\right| \cdot L(\varphi) = \sup_{|z|=R} \underbrace{\left|\frac{f(z)}{(z)^{n+1}}\right|}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{|z|^{n+1}}{(z-\xi)^{n+1}}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{2\pi|z|}{|z-\xi|}}_{\to 2\pi} \quad \text{pro } R \to \infty$$

$\Rightarrow |I|$ libovolně malé $\Rightarrow f^{(n+1)}(\xi) = 0$

□

Poznámka 5.12:
• funkce holomorfní v $\mathbb{C}$, která není polynom (např. e^z, $\sin z$), roste do nekonečna (pro vhodnou podposloupnost) velmi rychle
• tzv. **Liouvilleova věta:** funkce holomorfní a omezená v $\mathbb{C}$ je konstatní.
Dk: $f(z)$ omezená $\Rightarrow \frac{f(z)}{z} \to 0$ pro $z \to \infty$, (1) ve V.5.7 platí s $n = 0 \Rightarrow f(z)$ je polynom stupně ≤ 0, tj. konstanta.

□

Věta 5.8: **[Základní věta algebry.]** Polynom stupně ≥ 1 má v $\mathbb{C}$ alespoň jeden nulový bod. Věta 5.8

Důkaz věty 5.8: Sporem: Nechť $P(z) \neq 0$ v $\mathbb{C}$, $stP \geq 1$. Zjevně $|P(z)| \to \infty$ pro $z \to \infty$.
Polož: pomocná funkce $f(z) = \frac{1}{P(z)} \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$; tvrdím: $f(z)$ je omezená v $\mathbb{C}$.
$\exists R_0 > 0$: $|P(z)| \geq 1$ pro $|z| \geq R_0$, tj. $|f(z)| \leq 1$ pro $|z| \geq R_0$.
$M = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R_0\}$ omezená, uzavřená $\Rightarrow$ kompaktní
$|f(z)|$ je spojitá na $M \Rightarrow$ omezená $\{|z| \leq R_0\}$
Liouville $\Rightarrow f(z) \equiv a$ v $\mathbb{C}$, tedy $P(z) = \frac{1}{a}$ - polynom stupně < 1, SPOR

□

Poznámka 5.13: **Opakování.** Řada

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \qquad (*)$$

(kde z, z_0, $a_k \in \mathbb{C}$) se nazývá mocninná řada o středu z_0. Věta A (minulý rok): existuje (jednoznačně určené) číslo $R \in [0, +\infty]$ tak, že řada (*) konverguje pro každé $z \in U(z_0, R)$ a diverguje pro $|z - z_0| > R$. Na množině $U(z_0, R)$ lze řadu libovolně krát derivovat/integrovat (dle komplexní proměnné.) Speciálně, její součet je zde holomorfní.

Dále: řada (*) konverguje lokálně stejnoměrně v $U(z_0, R)$, tj. stejnoměrně na kompaktních podmnožinách

Definice 5.9: **[Laurentova řada.]** Nechť z_0, $a_k \in \mathbb{C}$. Řada Definice

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z - z_0)^k \qquad (1)$$

se nazývá Laurentova řada o středu z_0. Řady

$$(2)\ \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k \qquad \text{resp.} \quad (3)\ \sum_{k=-1}^{-\infty} a_k(z - z_0)^k := \sum_{l=1}^{\infty} a_{-l}(z - z_0)^{-l}$$

se nazývají regulární resp. hlavní část řady (1). Řada (1) konverguje (stejnoměrně, absolutně atd.), pokud (2) a (3) mají tuto vlastnost.

Poznámka 5.14:
• jde o zobecnění pojmu mocninné řady (*)
• úmluva: $a^0 = 1$ pro $\forall a \in \mathbb{C}$
• (3) a potažmo (1) nemá smysl pro $z = z_0$

Úmluva značení 5.2: Pro $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 \leq r < R \leq +\infty$ definuji mezikruží Úmluva

$$P(z_0; r, R) = \left\{z \in \mathbb{C} :\ r < |z - z_0| < R\right\}.$$

Věta 5.9: **[Konvergence Laurentovy řady.]** Je dána Laurentova řada. Potom existují jednoznačně určená čísla r, $R \in [0, +\infty]$ tak, že Věta 5.9

(i) R je poloměr konvegence regulární části

(ii) hlavní část konveguje pokud $|z - z_0| > r$ a diverguje pokud $|z - z_0| < r$.

Je-li $r < R$, pak Laurentova řada konverguje lokálně stejnoměrně v $P(z_0; r, R)$ a její součet je zde holomorfní.

Terminologie: $P(z_0; r, R)$ se nazve mezikruží konvergence Laurentovy řady.

Důkaz věty 5.9: (i) plyne z Věty A

(ii) označ $w = \frac{1}{z-z_0}$, pomocná řada (4) $\sum_{l=1}^{\infty} a_{-l} w^{-l}$
Věta A: $\exists \rho \in [0, \infty]$ ...poloměr konvergence řady (4); označ $r = \frac{1}{\rho}$ (s úmluvou $\frac{1}{0} = +\infty$), (4) diverguje pro $|w| > \rho$, konverguje pro $|w| < \rho \Leftrightarrow$ (3) diverguje $|z - z_0| < r$, (3) konverguje $|z - z_0| > r$
Nechť $r < R$: (2) konverguje lokálně stejnoměrně pro $|z - z_0| < R$ a lze derivovat člen po členu
940 konverguje lokálně stejnoměrně pro $|w| < \rho \Rightarrow$ (3) konverguje lokálně stejnoměrně pro $|z - z_0| > r$

zbývá: derivace (3); označ $g(w)$ ... součet (4), $h(z)$ ... součet (3)
Věta A: $g'(w) = \sum_{l=1}^{\infty} la_{-l}w^{l-1}$, avšak $h(z) = g(\frac{1}{z-z_0})$
derivace složené funkce:

$$h'(z) = g'(\frac{1}{z-z_0})\frac{-1}{(z-z_0)^2} = \sum_{l=1}^{\infty}(-l)a_{-l}w^{l-1}(z-z_0)^{1-l-2} =$$

$l = -k$

$$= \sum_{k=-1}^{-\infty} ka_k w^{k-1}(z-z_0)^{k-1}$$

derivace (3) člen po členu

$\square$

Poznámka 5.15:
• předchozí věta: Laurentova řada určuje v mezikruží konvergence holomorfní funkci
• následující věta: obrácené tvrzení - funkce holomorfní v mezikruží je vždy součtem Laurentovy řady

Věta 5.10: **[Existence Laurentova rozvoje.]** Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 \leq r < R \leq +\infty$. Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(P(z_0; r, R))$. Potom $f(z)$ je v $P(z_0; r, R)$ součtem jednoznačně určené Laurentovy řady o středu z_0. Pro její koeficienty platí Věta 5.10

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz\,,$$

kde φ je kružnice $z_0 + \rho e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ a $\rho \in (r, R)$ je libovolné.

Terminologie: tato řada se nazývá Laurentův rozvoj funkce o středu z_0.

Důkaz věty 5.10: **(jednoznačnost)**: nechť $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{a_k}(z - z_0^k)$
Počítejme

$$\int_{\varphi} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} = \int_{\varphi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{a_k}(z-z_0)^{k-n-1} \overset{\text{záměna } \sum, \int}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{a_k} \underbrace{\int_{\varphi}(z-z_0)^{k-n-1}}_{=\begin{cases}0 & k \neq n\\ 2\pi i & k = n\end{cases}} = 2\pi i\hat{a_n},$$

tj. platí (+) $\Rightarrow$ jednoznačnost a_n ... určeny hodnotami $f(z)$ na $\langle\varphi\rangle$
Záměna sumy a integrálu: Laurentova řada konverguje stejnoměrně na $\langle\varphi\rangle$ (kompaktní část $\mathcal{P}(z_0; r, R)$)

(existence): zvol $\xi \in \mathcal{P}(z_0; r, R)$ pevné, libovolné, čísla $r < \rho_1 < |\xi - z_0| < \rho_2 < R$
křivky: $\varphi_1 = z_0 + \rho_1 \mathrm{e}^{it}$
$\varphi_2 = z_0 + \rho_2 \mathrm{e}^{it}$

$Psi = \xi + \varepsilon \mathrm{e}^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$
tvrdím: $f(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi_2} \frac{f(z)}{z-\xi}\, dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi_1} \frac{f(z)}{z-\xi}\, dz$ (∗)

$$2\pi i f(\xi) \overset{\text{Cauchyho vzorec}}{=} \int_{\Psi} \frac{f(z)}{z-\xi}\, dz \overset{\text{Cauchyho věta}}{=} \int_{f_2} - \int_{f_1}$$

$$g(z) = \frac{f(z)}{z-\xi} \in \mathcal{H}(\mathcal{P}(z_0; r, R) \setminus \{\xi\}) \subset int\Gamma_1, \Gamma_2$$

$$0 = \int_{\Gamma_1} g(z)\,dz + \int_{\Gamma_2} g(z)\,dz = \int_{\varphi_1} - \int_{\varphi_2} - \int_{\Psi}$$

1. krok: regulární část, $z \in \langle \varphi_2 \rangle$:

$$\frac{1}{z-\xi} = \frac{1}{z-z_0-(\xi-z_0)} = \frac{1}{z-z_0}\frac{1}{1-\underbrace{\frac{\xi-z_0}{z-z_0}}_{q}} = \frac{1}{z-z_0}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\xi-z_0}{z-z_0}\right)^k,$$

kde $|q| < 1$: $|\xi - z_0| < |z - z_0|$ (neboť $z \in \langle\varphi_2\rangle$); řada konverguje absolutně stejnoměrně pro $z \in \langle\varphi_2\rangle$, majoranta $\sum |q|^k$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi_2}\frac{f(z)}{z-\xi}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi_2} f(z)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\xi-z_0)^k}{(z-z_0)^{k+1}}\,dz = \sum_{k=0}^{\infty}(\xi-z_0)^k \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi_2}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\,dz}_{a_k}$$

regulární část řady (ve shodě s (+))
analogicky: $z \in \langle\varphi_1\rangle$:

$$\frac{-1}{z-\xi} = \frac{-1}{(z-z_0)-(\xi-z_0)} = \frac{1}{\xi-z_0}\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\xi-z_0}}_{q} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^k}{(\xi-z_0)^{k+1}},$$

kde $|q| < 1$: $|z - z_0| < |\xi - z_0|$; tedy

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi_2}\frac{f(z)}{z-\xi}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi_2} f(z)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^k}{(\xi-z_0)^{k+1}}\,dz =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(\xi-z_0)^{k+1}}\frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi_1} f(z)(z-z_0)^k \overset{l=-k}{=} \sum_{l=-1}^{-\infty}(\xi-z_0)^l \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi_1}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz}_{a_l}$$

hlavní část (ve shodě s (+))

□

Poznámka 5.16: Vesměs budeme užívat pro speciální případ $r = 0$, tj. $P(z_0; 0, R) = P(z_0, R)$.

Věta 5.11: [**Taylorův rozvoj.**] Nechť $f(z) : \Omega \to \mathbb{C}$. Rovnost Věta 5.11

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k, \qquad \text{kde} \quad a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!},$$

platí v každém kruhu $U(z_0, R)$, v němž je $f(z)$ holomorfní.

Důkaz věty 5.11: Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(\mathcal{U}(z_0, r)) \Rightarrow f(z) \in \mathcal{P}(z_0; 0, R) = \mathcal{P}(z_0, R)$
V.5.10: $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$ platí pro $\mathcal{P}(z_0, R)$, kde $a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\,dz$

pozoruji: $k < 0$: $\frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} \in \mathcal{H}(int\varphi) \Rightarrow a_k = 0$
$k \geq 0$: $a_k = f^{(k)}(z_0) \ldots f(z) \in \mathcal{H}(int\varphi)$, Cauchyho vzorec
rovnost dokázána pro $z \in \mathcal{P}(z_0, R)$, pro $z = z_0$ platí triviálně.

□

Příklad 5.10: $f(x) = \frac{1}{1+x^2} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ Příklad
$f(x) = \frac{1}{1+x^2} == \frac{1}{1-(-x)^2} = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k x^{2k}$ platí pro $|x| < 1$
v $\mathbb{C}$: $f(z) = \frac{1}{1+z^2} \notin \mathcal{H}(\mathbb{C})$, $z = \pm i$
V.5.11 $\Rightarrow$ maximální $R = 1$ pro $z_0 = 0$

Poznámka 5.17: **Pozorování:** $a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi f(z)\,dz$, $f = z_0 + \rho e^{it}$, $t \in [0, 2\pi i]$

Definice 5.10: **[Reziduum funkce.]** Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(P(z_0))$. Koeficient a_{-1} v Laurentově rozvoji funkce $f(z)$ o středu z_0 nazýváme reziduum funkce $f(z)$ v bodě z_0. Značíme $\operatorname{res}_{z_0} f(z)$. Definice

Věta 5.12: **[Reziduová věta.]** Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(\Omega \setminus K)$, kde Ω je jednoduše souvislá a K je konečná. Nechť φ je kladně orientová Jordanova křivka v Ω a $K \cap \langle\varphi\rangle = \emptyset$. Potom Věta 5.12

$$\int_\varphi f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\zeta \in K \cap \operatorname{int}\varphi} \operatorname{res}_\zeta f(z)\,.$$

Důkaz věty 5.12: ***OBRAZEK1***
(pro obrázek): zvolme $\varepsilon > 0$, $f(z) \in \mathcal{H}(\mathcal{P}(\xi, \varepsilon))$ pro $\forall \xi \in K$
tvrdím: $\int_\varphi f(z)\,dz = \sum_{\xi \in K \cap int\varphi} \int_{\Psi_\xi} f(z)\,dz$ (***)
$\Psi_\xi = \xi + \varepsilon e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$
odtud závěr: $\int_{\Psi_\xi} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{res}_\xi f(z)$

dk (***) pro obrázek:
OBRAZEK2
$f(z) \in \mathcal{H}(int\Gamma_i)$, $i = 1, 2, 3$

$$0 = \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} + \int_{\Gamma_3} = \int_\varphi - \int_{\Psi_1} - \int_{\Psi_2} - \int_{\Psi_3},$$

což je (***).

□

Důsledek: k výpočtu integrálu stačí určit rezidua singularit, které křivka obíhá. Metody výpočtu residua: Laurentův rozvoj nebo následující věta:

Věta 5.13: **[Výpočet rezidua.]** 1. Nechť $f(z) = g(z)/(z - z_0)$, kde $g(z) \in \mathcal{H}(U(z_0))$. Potom Věta 5.13

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = g(z_0)\,.$$

2. Nechť $f(z) = g(z)/h(z)$, kde $g(z)$, $h(z) \in \mathcal{H}(U(z_0))$ a $h(z_0) = 0$, $h'(z_0) \neq 0$. Potom

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}\,.$$

3. Nechť $f(z) = g(z)/h(z)$, kde $g(z)$, $h(z) \in \mathcal{H}(U(z_0))$ a $h(z_0) = h'(z_0) = \cdots = h^{(p-1)}(z_0)$, avšak $h^{(p)}(z_0) \neq 0$. Potom

$$\mathrm{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z \to z_0} [(z-z_0)^p f(z)]]^{(p-1)} .$$

Důkaz věty 5.13:

(1): V.5.11: $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$, $a_k = \frac{g^{(k)}(z_0)}{k!}$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^{k-1}; \qquad \mathrm{res}_{z_0} f(z) = a_0 = g(z_0)$$

(2): V.5.11: $h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-z_0)^k$, $b_0 = h(z_0) = 0$, $b_1 = h'(z_0) \neq 0$

$$= (z-z_0) \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} b_k (z-z_0)^{k-1}}_{(*)} = (z-z_0) H(Z)$$

(*) má stejný poloměr konvergence jako řada pro $h(z)$, její součet $H(z) \in \mathcal{H}(\mathcal{U}(z_0))$, $H(z_0) = b_1 \neq 0$

$$f(z) = \frac{1}{z-z_0} \left[\frac{g(z)}{H(z)} \right] \in \mathcal{H}(\mathcal{U}(z_0)), \text{ dle (1):} \qquad \mathrm{res}_{z_0} f(z) = \frac{g(z_0)}{H(z_0)} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

(3): V.5.11: $h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-z_0)^k = \ldots$, kde $b_0 = b_1 = \ldots = b_{p-1} = 0$, $b_p \neq 0$, $b_p = \frac{h^{(p)}(z_0)}{p!}$

$$\ldots = (z-z_0)^p \underbrace{\sum_{k-0}^{\infty} b_k (z-z_0)^{k-p}}_{H(z) \in \mathcal{H}(\mathcal{U}(z_0)), H(z_0) \neq 0}$$

$$f(z) = \frac{G(z)}{(z-z_0)^p},$$

kde $G(z) = \frac{g(z)}{H(z)} \in \mathcal{H}(\mathcal{U}(z_0))$, V.5.11: $G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$, kde $a_k = \frac{G^{(k)}(z_0)}{k!}$
(derivace spojité: $G \in \mathcal{H}$)
tedy

$$f(z) = \frac{G(z)}{(z-z_0)^p},$$

$$\mathrm{res}_{z_0} f(z) = a_{p-1} = \frac{G^{(p-1)}(z_0)}{(p-1)!} = \lim_{z \to z_0} \left[\frac{1}{(p-1)!} G^{(p-1)}(z) \right] = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(p-1)!} \left[\underbrace{(z-z_0)^p f(z)}_{=G(z) \text{ na } \mathcal{P}(z_0)} \right]^{(p-1)}$$

□

Poznámka 5.18:

• O funkci $h(z)$ v situaci 3 říkáme, že má v bodě z_0 kořen násobnosti p.

• V aplikacích lze obvykle limitu uvedenou v bodě 3 počítat rovnou dosazením $z = z_0$.

Příklad 5.11: Příklad

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

Zvolme

$$f(z) = \frac{dz}{(z^2+1)^2}$$

Označme $\Gamma = \varphi_1 \oplus \varphi_2$, kde
$\varphi_1 = t,\ t \in [-R, R]$
$\varphi_2 = t,\ t \in [0, \pi]$
$f(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{i, -i\})$, BÚNO $R > 1$:
V.5.12: $\int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{res}_i f(z)$
$\int_\Gamma = \int_{\varphi_1} + \int_{\varphi_2}$
$\int_{\varphi_1} = \int_{-R}^{R} \frac{dt}{(1+t^2)^2} \to I$ pro $R \to \infty$,
tvrdím: $\int_{\varphi_2} \to 0$:

$$\left| \int_{\varphi_2} f(z\,dz) \right| \leq \underbrace{L(\varphi_2)}_{\pi R} \underbrace{\sup_{z \in \langle \varphi_2 \rangle} |f(z)|}_{\leq \frac{1}{(R^2+1)^2}} \to 0$$

Nechť $z \in \varphi_2 \Rightarrow |z = R|$: $|z^2 + 1| \geq |z^2| - 1 = R^2 - 1$

$$\operatorname{res}_i f(z) = \lim_{z \to i} \frac{1}{1!} [(z-i)^2 f(z)]' = \lim_{z \to i} \left[\frac{1}{(z+i)^2} \right]' = \frac{-2}{(z+i)^3} \,|_{z=i} = \frac{-2}{(2i)^3}$$

$$f(z) = \frac{1}{(z+i)^2 (z-i)^2} \quad \ldots \quad \text{bod (3) V.5.13; } g(z=1), h(z) = (z^2+1)^2), p = 2$$

přechod $R \to +\infty$: $I = 2\pi i \left(\frac{-2}{-8i} \right) = \frac{\pi}{2}$

Poznámka 5.19: Obecně $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx$, kde $R(x) = P(x)/Q(x)$; $st.Q \geq st.P + 2$, $Q(x) \neq 0$ v $\mathbb{R}$

$$I = 2\pi i \sum_{\xi, Q(\xi)=0, \mathrm{Im}(\xi)>0} \operatorname{res}_\xi R(z)$$

Definice 5.11: **[Izolovaná singularita.]** Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$. Říkáme, že funkce $f(z)$ má v bodě izolovanou singularitu, je-li $f(z)$ holomorfní na jistém $P(z_0)$. Definice

Na základě Laurentova rozvoje v daném bodě se rozlišuje:

(i) odstranitelná singularita, je-li $a_k = 0$ pro $\forall k < 0$

(ii) pól násobnosti $p \in \mathbb{N}$, je-li $a_{-p} \neq 0$ a $a_k = 0$ pro $\forall k < -p$

(iii) podstatná singularita, je-li $a_k \neq 0$ pro nekonečně $k < 0$

Příklad 5.12: Příklad

• $\frac{\sin z}{z}$, $\frac{1-\cos z}{z^2}$ ... v bodě 0 odstranitelné singularity

• $\frac{e^z}{z^3}$ ... v bodě 0 pól násobnosti 3
• $\cosh(1/z)$ ... v bodě 0 podstatná singularita

Věta 5.14: [Charakterizace odstranitelné singularity.] Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(P(z_0))$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní: Věta 5.14

(1) $f(z)$ má v bodě z_0 odstranitelnou singularitu

(2) existuje $g(z) \in \mathcal{H}(U(z_0))$ tak, že $f(z) = g(z)$ na $P(z_0)$

(3) $f(z)$ má v bodě z_0 vlastní limitu

(4) $f(z)$ je omezená na jistém $P(z_0)$

Důkaz věty 5.14:

(1) ⇒ (2): $f(z) \in \mathcal{H}(\mathcal{P}(z_0))$, V.5.10: $f(z) = \int_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z-z_0)^k = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k}_{(*)}$

platí v $\mathcal{P}(z_0)$
řada (*) má kladný poloměr konvergence, její součet $g(z) \in \mathcal{H}(\mathcal{U}(z_0))$, kde $g(z)$ je hledané rozšíření $f(z)$.

(2) ⇒ (3):

$$\lim_{z\to z_0} f(z) \overset{f(z)=g(z) \text{ na } \mathcal{U}(z_0)}{=} \lim_{z\to z_0} g(z) = g(z_0) \in \mathbb{C}$$

(3) ⇒ (4): zjevné

(4) ⇒ (1): cíl: $a_k = 0$, $\forall k < 0$, V.5.10:

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}};$$

$\varphi = z_0 + \rho e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$

$$|a_k| \leq \frac{1}{2\pi} L(\varphi) \sup_{z\in\langle\varphi\rangle} |f(z)| \rho^{-k-1} \overset{\text{omezenost } |f(z)|\leq K}{\leq} \frac{1}{2\pi} 2\pi\rho K \rho^{-k-1},$$

tj. $|a_k| \leq K\rho^{-k}$
Platí pro ρ libovolně malé, pro $k < 0$: ρ^{-k} libovolně malé ⇒ $a_k = 0$

□

Příklad 5.13: $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(2x-\pi)(x^2 5+)}\, dx$ Příklad
Tedy $f(z) = \frac{\exp(iz)}{(2z-\pi)(z^2+5)}$
Označme křivky:
$\varphi_1 = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$
$\varphi_2 = t$, $t \in [-R, \frac{\pi}{2} - r]$
$\varphi_3 = \frac{\pi}{2} + re^{it}$, $t \in [0, \pi]$
$\varphi_4 = t$, $t \in [\frac{\pi}{2} + r, R]$

Nechť $\Gamma = \varphi_1 \oplus \varphi_2 \ominus \varphi_3 \oplus \varphi_4$ je kladně orientovaná Jordanova křivka
Tedy $f(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{\frac{\pi}{2}, \pm i\sqrt{5}\})$
V.5.12: $\int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{res}_{i\sqrt{5}} f(z)$

$$\int_{\varphi_2} + \int_{\varphi_1} = \left(\int_{-R}^{\frac{\pi}{2}-r} + \int_{\frac{\pi}{2}+r}^{R}\right) \frac{\mathrm{e}^{it}}{(2t-\pi)(t^2+5)}\,dt$$

Nechť $R \to +\infty$, $r \to 0_+$, víme, že $\mathrm{e}^{it} = \cos t + i \sin t$, pak

$$\operatorname{Re}[\int_{f_2} + \int_{f_1}] \to I \text{ pro } R \to +\infty, r \to 0_+$$

$\int_{\varphi_1} f(z) \to 0$ pro $R \to +\infty$: L.5.1: $f(z) = \mathrm{e}^{iz} h(z)$, $|h(z)| \leq \frac{K}{|z|^3}$
$\int_{\varphi_3} f(z) \to \pi i A$, L.5.2, kde $A = \lim_{z \to z_0} z - \overline{z_0}) f(z)$, zde $A = \lim_{z \to \frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{e}^{iz}(z-\frac{\pi}{2})}{(2z-\pi)(z^2+5)} = \frac{\mathrm{e}^{i\pi/2}}{2(\pi^2/4+5)}$

$$\operatorname{res}_{i\sqrt{5}} f(z) = \operatorname{res}_{i\sqrt{5}} \frac{\mathrm{e}^{iz}}{(2z-\pi)(z^2+5)} \frac{1}{z-i\sqrt{5}} \overset{V.5.13(1)}{=} \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{5}}}{(2i\sqrt{5}-\pi)2i\sqrt{5}}$$

Závěr: $2\pi i \operatorname{res}_{i\sqrt{5}} f(z) = \int_{\varphi_1} + \int_{\varphi_2} - \int_{\varphi_3} + \int_{\varphi_4}$, nechť $R \to \infty$, $r \to 0+$, uvažuji jen $\operatorname{Re}[\ldots]$:

$$\underbrace{\operatorname{Re}\left[\frac{2\pi i \mathrm{e}^{-\sqrt{5}}}{(2i\sqrt{5}-\pi)2i\sqrt{5}}\right]}_{\operatorname{Re}_1} = I - \underbrace{\operatorname{Re}\left[\pi i \frac{\mathrm{e}^{i\pi/2}}{2(\pi^2/4+5)}\right]}_{\operatorname{Re}_2}$$

$$\operatorname{Re}_1 = \frac{\pi \mathrm{e}^{-\sqrt{5}}}{\sqrt{5}} \operatorname{Re}\left[\frac{1}{2i\sqrt{5}-\pi}\right] = \frac{\pi \mathrm{e}^{-\sqrt{5}}}{\sqrt{5}} \operatorname{Re}\left[\frac{-\pi+2i\sqrt{5}}{\pi^2+20}\right] = \frac{\pi \mathrm{e}^{-\sqrt{5}}}{\sqrt{5}} \frac{-\pi}{\pi^2+20}$$

$$\operatorname{Re}_2 = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\pi^2/4+5} \operatorname{Re} \underbrace{(i \mathrm{e}^{i\pi/2})}_{-1}$$

Obecně: $\int_{-\infty}^{\infty} R(x \cos x)$, $\int_{-\infty}^{\infty} R(x \sin x)$, kde $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, $st.Q \geq st.P + 1$, $Q(x)$ může mít jednoduché kořeny v $\mathbb{R}$, v nich se musí anulovat odpovídající goniometrické funkce

Příklad 5.14: Příklad

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2 + \sin x},$$

tvrdíme:

$$I = \int_C \frac{1}{2 + \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})} \underbrace{\frac{dz}{iz}}_{dt}, \qquad \text{kde } c = \mathrm{e}^{it},\ t \in [0, 2\pi]$$

dosadíme: $\frac{dz}{iz} = \frac{i\mathrm{e}^{it}\,dt}{i\mathrm{e}^{it}} = dt$

$$\frac{1}{2i}\left(\mathrm{e}^{it} - \frac{1}{\mathrm{e}^{it}}\right) = \sin t$$

analogicky

$$\cos t = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

V.5.12: $I = 2\pi i \sum_{\xi-\text{singularity},|\xi|<1} \operatorname{res}_\xi f(z)$

$$f(z) = \frac{2}{4iz + z^2 - 1} = \frac{2}{(z-z_1)(z-z_2)},$$

kde

$$z_{1,2} = \frac{-4i \pm \sqrt{-16+4}}{2} = -2i \pm i\sqrt{3} = i(-2 \pm \sqrt{3})$$

$z_1 = i(-2-\sqrt{3})$, $|z_1| > 1$
$z_2 = i(-2+\sqrt{3})$
$I = 2\pi i \operatorname{res}_{z_2} f(z) = 2\pi i \frac{2}{i(\sqrt{3}-2) - i(-2-\sqrt{3})} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

Obecně:

$$\int_0^\pi R(\cos x, \sin x)\,dx = \int_C R\left[\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right]\frac{dz}{iz}, \quad \to \text{ reziduová věta}$$

kde $R(\ldots)$ je racionální funkce a $C = \mathrm{e}^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Věta 5.15: **[Charakterizace pólu.]** Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(P(z_0))$. Potom je ekvivalentní: Věta 5.15

(1) existuje $p \in \mathbb{N}$ tak, že $f(z)$ má v z_0 pól násobnosti p

(2) $f(z) \to \infty$ pro $z \to z_0$

Důkaz věty 5.15:

(1) $\Rightarrow$ (2): $f(z) = \sum_{k=-p}^\infty a_k(z-z_0)^k$, $a_{-p} \neq 0$, platí v $\mathcal{P}(z_0)$

$$= (z-z_0)^{-p} \underbrace{\sum_{k=-p}^\infty a_k(z-z_0)^{k+p}}_{g(z)}$$

$g(z)$ je mocninná řada, $(k+p \geq 0)$, má kladný poloměr konvergence (konverguje pro $z \neq z_0$)
$g(z) \in \mathcal{H}(\mathcal{U}(z_0))$, $g(z_0) = a_{-p} \neq 0$
pro $z \to z_0$: $g(z) \to a_{-p}$, $(z-z_0)^{-p} \to \infty$ (v $\mathbb{C}$, tj. $|\cdot| \to +\infty$)
$\Rightarrow f(z) \to \infty$ (opět v $\mathbb{C}$)

(2) $\Rightarrow$ (1): $f(z) \to \infty \Rightarrow |f(z)| > 1$ na $\mathcal{P}(z)$
pomocná funkce: $g(z) = \frac{1}{f(z)}$, $g \in \mathcal{H}(\mathcal{P}(z_0))$, $|g(z)| < 1$
V.5.14: $\exists h(z) \in \mathcal{H}(\mathcal{U}(z_0))$; $h(z) = g(z) = \frac{1}{f(z)}$ na $\mathcal{P}(z)$
V.5.11 (Taylor):

$$h(z) = \sum_{k=0}^\infty a_k(z-z_0)^k = \sum_{k=p}^\infty a_k(z-z_0)^k$$

pro a_p - nejmenší nenulový koeficient
cíl: $p \ldots$ násobnost pólu $f(z)$
nutně $p \geq 1$: $p = 0$ $h(z_0) = a_0 \neq 0$, $|h(z_0)| \geq \varepsilon > 0$ v $\mathcal{U}(z_0)$
$\Rightarrow \left|\frac{1}{f(z)}\right| \leq \frac{1}{\varepsilon}$ v $\mathcal{P}(z_0)$ ... spor s předpokladem 2.

$$h(z) = (z - z_0)^p \underbrace{\sum_{k=p}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k-p}}_{H(z) \in \mathcal{H}(\mathcal{U}(z_0)), H(z_0) \neq 0}$$

Tedy

$$\frac{1}{H(z)} \in \mathcal{H}(\mathcal{U}(z_0)) \quad \ldots \quad \frac{1}{H(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k, \quad b_0 = \frac{1}{H(z_0}) \neq 0$$

Závěr: $f(z) = \frac{1}{h(z)} = (z - z_0)^{-p} \sum_{k=}^{\infty} b_k (z - z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^{k-p}$ v $\mathcal{P}(z_0)$

- hledaný LAurentův rozvoj $f(z)$
- pól násobnosti p

$\square$

Věta 5.16: **[Charakterizace podstatné singularity.]** Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(P(z_0))$. Potom je ekvivalentní: Věta 5.16

(1) $f(z)$ má v z_0 podstatnou singularitu

(2) pro $\forall \delta > 0$ je množina $f(P(z_0, \delta))$ hustá v $\mathbb{S}$

Poznámka 5.20: Množina M je hustá v prostoru X, pokud

$$\big(\forall x \in X\big)\big(\forall \epsilon > 0\big)\big[M \cap U(x, \epsilon) \neq \emptyset\big]\,.$$

Důkaz věty 5.16: (1) $\Rightarrow$ (2): dokážeme $\neg(2) \Rightarrow \neg(1)$:
$\neg(2)$: $\exists \delta > 0$, $f(\mathcal{P}(z_0, \delta))$ není hustá v $\mathbb{S}$; $\exists \xi \in \mathbb{S}$ $\exists \varepsilon > 0 : f(\mathcal{P}(z_0, \delta) \cap \mathcal{U}(\xi, \varepsilon)) = \emptyset$

- případ (i): $\xi = \infty$, $\mathcal{U}(\infty, \varepsilon) = \{\infty\} \cup \{z \in \mathbb{C}; |k| > \frac{1}{\varepsilon}\}$, tj. $|f(z)| \leq \frac{1}{\varepsilon}$ pro $\mathcal{P}(z_0, \delta)$... V.5.14... $f(z)$ má v z_0 odstranitelnou singularitu, tj. $\neg(1)$

- případ (ii): $\xi \in \mathbb{C}$: $|f(z) - \xi| \geq \varepsilon$ pro $\forall z \in \mathcal{P}(z_0, \delta)$
pomocná funkce: $g(z) = \frac{1}{f(z) - \xi}$, $g(z) \in \mathcal{H}(\mathcal{P}(z_0, \delta))$, $|g(z)| \leq \frac{1}{\varepsilon}$... V.5.14: $g(z) \in \mathcal{H}(\mathcal{U}(z_0, \delta))$... lze ji dodefinovat

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = \sum_{k=p}^{\infty} a_k (z - z_0)^k,$$

a_p nejmenší nenulové; $(p \geq 0)$

- případ (α): $p = 0$: tj. $g(z) = a_0$ / 0: $\frac{1}{g(z)} = f(z) - \xi \in \mathcal{H}(\mathcal{U}(z_0, \delta)) \Rightarrow f(z) \in \mathcal{H}(\mathcal{U}(z_0, \delta)) \Rightarrow$ neplatí (1)
- případ (β): $p > 0$: $g(z) = (z - z_0)^p h(z)$, kde $h(z)$ je holomorfní, nenulová v $\mathcal{U}(z_0)$
$$f(z) = \xi + \frac{1}{(z - z_0)^p} \frac{1}{h(z)} \rightarrow$$
$\rightarrow f(z)$ má v z_0 pól násobnosti $p \Rightarrow$ neplatí (1)

(2) $\Rightarrow$ (1): nepřímo, $\neg(1) \Rightarrow \neg(2)$:
$f(z)$ nemá podstatnou singularitu $\Rightarrow$ (i) má odstranitelnou singularitu,
(ii) má pól

- (i) V.5.14: $|f(z)| \leq K$ na $\mathcal{P}(z_0) \dots f(\mathcal{P}(z_0)) \cap \mathcal{U}\left(\infty, \frac{1}{K}\right) = \emptyset \Rightarrow f(\mathcal{P}(z_0))$ není hustá v $\mathbb{S}$
- (ii) V.5.15: $|f(z)| \geq K$ na $\mathcal{P}(z_0) \dots f(\mathcal{P}(z_0)) \cap \mathcal{U}(0, K) = \emptyset$, tedy $f(\mathcal{P}(z_0))$ není hustá v S

□

Příklad 5.15: $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$ Příklad

$f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$; $f^{(n)}(0) = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, tj. neplatí $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{f^{(n)}(0)}{n!}}_{=0} x^n$

to se nestane v $\mathbb{C}$: $e^{-1/z}$ ... podstatná singularita v 0
$e^{-1/k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{-k}}{k!}$

Definice 5.12: **[Hromadný bod.]** Bod z_0 nazveme hromadným bodem množiny M, jestliže $P(z_0, \delta) \cap M \neq \emptyset$ pro $\forall \delta > 0$. Definice

Příklad 5.16: Příklad
- hromadné body $\mathbb{Q}$ ... celé $\mathbb{R}$
- konečná množina nemá hromadné body
- množina $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ má jediný hromadný bod: 0

Lemma 5.4: Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(U(z_0, R))$ a nechť z_0 je hromadný bod $\mathcal{N} = \{\zeta : f(\zeta) = 0\}$. Potom $f(z) = 0$ v $U(z_0, R)$. Lemma 5.4

Důkaz lemmatu 5.4: $f(z) \in \mathcal{H}(\mathcal{U}(z_0, R))$: V.5.11: $f(z) = (z - z_0)^p \underbrace{\sum_{k=p}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k-p}}_{g(z)}$

$g(z) \in \mathcal{H}(\mathcal{U}(z_0, R))$, $g(z_0) = a_p \neq 0 \Rightarrow g(z) \neq 0$ v $\mathcal{U}(z_0)$, $(z - z_0)^p \neq 0$ v $\mathcal{P}(z_0) \Rightarrow f(z) \neq 0$ v $\mathcal{P}(z_0)$ SPOR z_0 - hromadný bod

□

Věta 5.17: **[O jednoznačnosti.]** Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(\Omega)$, kde Ω je souvislá. Nechť $\mathcal{N} = \{\zeta : f(\zeta) = 0\}$ má v Ω hromadný bod. Potom $f(z) = 0$ v Ω. Věta 5.17

Důkaz věty 5.17: z_0 - hromadný bod $\mathcal{N}$
$R > 0$ maximální takové, že $\mathcal{U}(z_0, R) \subset \Omega$
L.5.4: $\Rightarrow f(z) \equiv 0$ na $\mathcal{U}(z_0, R)$; z_1 hromadný bod $\mathcal{N}$ - opakujeme postup

$\square$

Důsledek: $f(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ a $f(z) = 0$ v $\mathbb{R} \implies f(z) = 0$ v $\mathbb{C}$.
Dk: V.5.17: $\Omega = \mathbb{C}$, $\mathcal{N} \supset R \ldots$ každé $x \in \mathbb{R}$ je hromadný bod $\mathcal{N}$.

Poznámka 5.21: V.5.17 jinak: pokud $f(z) \not\equiv 0$, pak $\mathcal{N}$ nemá v Ω hromadný bod. – Může ho však mít na $\partial\Omega$: polož $f(z) = \sin(1/z)$, $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Potom $\mathcal{N} = \{1/(k\pi) : \ 0 \neq k \in \mathcal{Z}\}$ má hromadný bod $0 \notin \Omega$.

Příklad 5.17: $f(z) = \sin(\frac{1}{z})$, $f(z \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ - souvislá množina Příklad
pomocný problém $\sin\xi = 0$

a) $\xi \in \mathbb{R}$: $\xi = k\pi$, $k \in \mathcal{Z} \ldots$dcv.
b) $\xi \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ takové neexistuje.

$f(z) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{z} = k\pi$, tj. $\underbrace{z = \frac{1}{k\pi}, k \in \mathcal{Z} \setminus \{0\}}_{\mathcal{N}}$

hromadný bod: $\mathcal{N} = \{0\}$ neleží v $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

Kapitola 6

Fourierova transformace

Pojmy v kapitole 6: Fourierova transformace, konvoluce, gausián, Schwartzův prostor. Věta o zachování symetrie, vztah F.t. a derivace, hustota hladkých funkcí, nulovost F.t. v nekonečnu, vlastnosti konvoluce, vztah F.t. a konvoluce, F.t. gausiánu, integrace radiálních funkcí, vlastnosti Schwartzova prostoru, o inverzi F.t., inverze F.t. v L^1, Plancherelova nerovnost, F.t. v L^2, princip neurčitosti.

Definice 6.1: **[Fourierova transformace.]** Pro $f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definujeme (dopřednou) Fourierovu transformaci Definice

$$\big[\mathcal{F}f\big](\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x,\xi)} f(x)\,dx \qquad \xi \in \mathbb{R}^n\,.$$

Dále definujeme inverzní (zpětnou) F. t.

$$\big[\mathcal{F}_{-1}f\big](\xi) = \check{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x,\xi)} f(x)\,dx \qquad \xi \in \mathbb{R}^n\,.$$

Zde (x,ξ) je skalární součin x, $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Poznámka 6.1:
- definice je korektní: $|\exp\{\pm 2\pi i(x,\xi)\}| = 1$, majoranta integrálu $|f(x)|$
- $\mathcal{F}$ přiřazuje funkci $f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ funkci $\hat{f}(\xi) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$
- jiná varianta definice:

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,\xi)} f(x)\,dx\,, \qquad \check{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\xi)} f(x)\,dx\,.$$

Příklad 6.1: $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0,1) \\ 0 & x \notin (0,1) \end{cases}$ Příklad

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-2\pi i x\xi} f(x)\,dx = \int_0^1 \mathrm{e}^{-1\pi i x\xi}\,dx = \begin{cases} 1 & \xi = 0 \\ \Big[\frac{\mathrm{e}^{-2\pi i x\xi}}{2\pi i\xi}\Big]_{x=0}^{1} & \end{cases}$$

$$\hat{f}(\xi) = \begin{cases} 1 & \xi = 0 \\ \frac{1}{2\pi i\xi}\left(1 - \mathrm{e}^{-2\pi i\xi}\right) & \end{cases}$$

$\hat{f}(\xi)$ je spojitá, $\hat{f}(\xi) \to 0$ pro $\xi \to \infty$

Úmluva značení 6.1: Prostory funkcí $f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$. Úmluva

• $L^p(\mathbb{R}^n)$ ... L^p-integrovatelné, $\|f\|_p = \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx\right]^{1/p}$
• $C_b(\mathbb{R}^n)$ ... spojité a omezené, $\|f\|_{C_b} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)|$
• $C_0(\mathbb{R}^n)$ ... s nulou v nekonečnu:

$$C_0(\mathbb{R}^n) = \{f \in C_b(\mathbb{R}^n) : \ |f(x)| \to 0 \text{ pro } |x| \to +\infty\}$$

• $C_c(\mathbb{R}^n)$ ... s kompaktním nosičem - nosič f definuji

$$\operatorname{spt} f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : \ f(x) \neq 0\}}\,.$$

Věta 6.1: $\mathcal{F}$ je spojité lineární zobrazení z $L^1(\mathbb{R}^n)$ do $C_b(\mathbb{R}^n)$ a platí Věta 6.1

$$\left\|\hat{f}\right\|_{C_b} \leq \|f\|_1\,.$$

Důkaz věty 6.1: __Linearita $\mathcal{F}$:__ $\widehat{f+g} = \hat{f} + \hat{g}$, $\widehat{af} = a\hat{f}$, $a \in \mathbb{C}$, $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ - jasné z definice

$\hat{f}(\xi)$ je spojitá (fce ξ): $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}}^n \mathrm{e}^{-2\pi i(x,\xi)} f(x)\,dx$, kde $(\mathrm{e}^{-2\pi i(x,\xi)} f(x))$ závisí na ξ spojité pro $\forall x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow$ závěr.

__Spojitost $\mathcal{F}$:__ linearita $\left\|\hat{f} - \hat{g}\right\|_{C_b} \leq \|f - g\|_1$, tj. $\|\mathcal{F}f - \mathcal{F}g\|_{C_b} \leq \|f - g\|_1 \Rightarrow \mathcal{F}$ je lipschitzovské s konstantou 1.

□

Věta 6.2: **[Zachování symetrie.]** Nechť $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ je sudá (resp. lichá resp. radiální.) Potom $\hat{f}$ má analogickou vlastnost. Věta 6.2

Důkaz věty 6.2:

• $f(x)$ lichá:

$$\hat{f}(-\xi) = \int_{\mathbb{R}}^n \mathrm{e}^{-2\pi i(x,-\xi)} f(x\,dx) \overset{*)\text{subst. } x=y}{=} \int_{\mathbb{R}}^n \mathrm{e}^{-2\pi i(-y,-\xi)} f(-y)\,dy =$$
$$= -\int_{\mathbb{R}}^n \mathrm{e}^{-2\pi i(y,\xi)} = -\hat{f}(\xi)$$

*): matice transformace diagonální, na diagonále jsou "-1", $\mathrm{J}\varphi = 1$

• $f(x)$ sudá: analogicky

• $f(x)$ radiální: $f(x)$ závisí pouze na $|x|$; $f(x) = f(Rx)$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$ pro každou lineární transformaci R, která zachovává vzdálenost (otočení, symetrie); nutně $|\det R| = 1$

$$\hat{f}(R\xi) = \int_{\mathbb{R}}^n \mathrm{e}^{-2\pi i(x,R\xi)} f(x)\,dx \overset{\text{subst. } x=y, \mathrm{J}\varphi=1}{=} \int_{\mathbb{R}}^n \mathrm{e}^{-2\pi i(Ry,R\xi)} f(Ry)\,dy =$$
$$= \int_{\mathbb{R}}^n \mathrm{e}^{-2\pi i(y,\xi)} f(y)\,dy = \hat{f}(\xi), \qquad \text{kde } (Ry, R\xi) = (y, \xi)$$

□

Poznámka 6.2: Pro $n = 1$: $\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-2\pi i x\xi} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi\xi) f(x)\,dx - i\int_{-\infty}^{\infty} \sin(2\pi\xi) f(x)\,dx$, je-li $f(x)$ sudá (lichá), potom druhý (první) člen je 0.

Věta 6.3: Nechť $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Pak platí: Věta 6.3

(1) $\check{f}(\xi) = \hat{f}(-\xi)$

(2) $\overline{\check{f}}(\xi) = \hat{\overline{f}}(\xi)$, $\overline{\hat{f}}(\xi) = \check{\overline{f}}(\xi)$

(3) $\hat{f}(\xi - \eta) = \big[\widehat{e^{2\pi i(x,\eta)} f(x)}\big](\xi)$

(4) $\widehat{f(x-z)}(\xi) = e^{-2\pi i(\xi,z)}\hat{f}(\xi)$

(5) $\widehat{f(\varepsilon x)}(\xi) = \frac{1}{|\varepsilon|^n}\hat{f}(\xi/\varepsilon)$ pro $\varepsilon \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

Důkaz věty 6.3:

(1) $\check{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp\{2\pi i(x,\xi)\} f(x)\ dx = \int_{\mathbb{R}^n} \exp\{-2\pi i(x,-\xi)\} f(x)\ dx = \hat{f}(-\xi)$

(2) $\overline{\check{f}}(\xi) = \overline{\int_{\mathbb{R}^n} \exp\{2\pi i(x,\xi)\} f(x)\ dx} = \int_{\mathbb{R}^n} \exp\{-2\pi i(x,\xi)\}\overline{f}(x)\ dx = \hat{\overline{f}}(\xi)$
Druhá nerovnost analogicky.

(3) $\hat{f}(\xi - \eta) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp\{-2\pi i(x,\xi-\eta)\} f(x)\ dx =$
$\int_{\mathbb{R}^n} \exp\{-2\pi i(x,\xi)\}\cdot \underbrace{[f(x)\exp\{2\pi i(x,\xi)\}]}_{h(x)}\ dx = \hat{h}(\xi) = \big[\widehat{e^{2\pi i(x,\eta)} f(x)}\big](\xi)$

(4) $\widehat{f(x-z)}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp\{-2\pi i(x,\xi-\eta)\} f(x-z)\ dx = \ldots$
substituce: $x - z = y \;\rightarrow\; x = y + z,\ dx = dy$ (J = 1)
$\ldots = \int_{\mathbb{R}^n} \exp\{-2\pi i(y+z,\xi)\} f(y)\ dy = \exp\{-2\pi i(\xi,z)\}\hat{f}(\xi)$

(5) $\widehat{f(\varepsilon x)}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp\{-2\pi i(x,\xi)\} f(\varepsilon x)\ dx = \ldots$
substituce: $\varepsilon x = y \;\rightarrow\; x = y/\varepsilon$, $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x = \mathrm{diag}(\varepsilon^{-1})y$, $\mathrm{J} = |\varepsilon|^{-n}$
$\ldots = |\varepsilon^{-n}| \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \exp\{-2\pi i(x,\varepsilon^{-1}\xi)\} f(y)\ dy}_{\hat{f}(\xi/\varepsilon)} \frac{1}{|\varepsilon|^n}\hat{f}(\xi/\varepsilon)$ pro $\varepsilon \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

□

Věta 6.4: **[Vztah F.t. a derivace.]** (1) Nechť $f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C_0(\mathbb{R}^n)$ a $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n)$. Potom Věta 6.4

$$\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(\xi) = 2\pi i\xi_j \hat{f}(\xi) \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n\,.$$

(2) Nechť $f(x)$, $x_j f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Potom

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_j}(\xi) = \big[-\widehat{2\pi i x_j f(x)}\big](\xi) \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n\,.$$

Důkaz věty 6.4: (1) BÚNO: $j = 1$, pišme $x \in \mathbb{R}^n$ jako $x = (x_1, \tilde{x})$, kde $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$,

$x \in \mathbb{R}$ Tedy $f(x) \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n) \Rightarrow$ pro $\forall x$ pevné platí

$$0 = \Big[\exp\{-2\pi i\big((x_1,\tilde{x}),\xi\big)\}\Big]_{x_1=-\infty}^{x_1=+\infty} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x_1}\Big[\exp\{-2\pi i\big((x_1,\tilde{x}),\xi\big)\}f(x)\Big]\,,$$

kde

$$\frac{\partial}{\partial x_1}[\ldots] = -2\pi\xi_1 \exp\{-2\pi i\big((x_1,\tilde{x}),\xi\big)\}f(x) + \exp\{-2\pi i\big((x_1,\tilde{x}),\xi\big)\}\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)$$

Takto dostanu pro $\forall \tilde{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$ pevné:

$$2\pi i\xi_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-2\pi i\big((x_1,\tilde{x}),\xi\big)\}f\big((x,\tilde{x})\big)\ dx_1 =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-2\pi i\big((x_1,\tilde{x}),\xi\big)\}\frac{\partial f}{\partial x_1}\ dx_1 = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\tilde{x};$$

Fubiniho věta:

$$\int_{R^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1\right) d\tilde{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \ dx$$

odtud

$$\Rightarrow 2\pi i\xi_1 \cdot \hat{f}(\xi) = \frac{\partial \hat{f}}{\partial x_1}(\xi)$$

(2): $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp\{-2\pi i(x,\xi)\}f(x)\ dx \quad / \frac{\partial}{\partial \xi_j}$

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_j} = \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{-2\pi i x_j \exp\{-2\pi i(x,\xi)\}f(x)}_{h(\xi,x)}\ dx = -2\pi[\widehat{x_j f(x)}](\xi)$$

Poznámka: používáme vzorce:

$$a,b \in \mathbb{R}^n: \quad \frac{\partial}{\partial a_i}\{(a,b)\} = b_i$$

Proč můžu zaměnit derivaci a integrál? Majoranta:

$$|h(\xi,x)| \le 2\pi|x_j f(x)| \in L^1(\mathbb{R}^n) \text{ dle předpokladů (nezávisle na } \xi).$$

□

Poznámka 6.3: Názorně: derivace f dle x_j odpovídá násobení $\hat{f}$ (konstanta krát) ξ_j. A naopak: derivace $\hat{f}$ dle ξ_j odpovídá násobení (konstanta krát) x_j.

Definice 6.2: **[Multiindex.]** Multiindexem nazývám n-tici čísel $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, kde $\alpha_j \ge 0$ jsou celá. Číslo $|\alpha| = \sum_{j=1}^n |\alpha_j|$ nazývám výška (stupeň) multiindexu. Pro funkci $f(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definuji Definice

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}\,.$$

Pro vektor $x \in \mathbb{R}^n$ definuji

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}\,.$$

Zobecnění. [Věty 6.4.]

(1) Nechť $D^\alpha f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C_0(\mathbb{R}^n)$ pro každý multiindex $|\alpha| \le k$. Potom

$$\widehat{[D^\alpha f]}(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \hat{f}(\xi) \qquad \forall |\alpha| \le k\,.$$

(2) Nechť $x^\alpha f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ pro každý multiindex $|\alpha| \le k$. Potom

$$\big[D^\alpha \hat{f}\big](\xi) = \big[\widehat{(-2\pi i x)^\alpha f(x)}\big](\xi) \qquad \forall |\alpha| \le k\,.$$

Důkaz.

(1) V.6.4: $\frac{\partial}{\partial x_1}$ …násobím $\hat{f}$ faktorem $2\pi i \xi_j$. Tedy

$$D^\alpha_\xi \hat{f}(x) = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} x_1 \dots \partial^{\alpha_n} x_n},$$

tj. násobím $\hat{f}$ faktorem

$$\underbrace{(2\pi i \xi_1)^{\alpha_1} \dots (2\pi i \xi_n)^{\alpha_n}}_{(2\pi i \xi)^\alpha}$$

(2) Obdobná úvaha.

Úmluva značení 6.2: Úmluva

$$C^k(\mathbb{R}^n) = \big\{ f(x) : \ D^\alpha f(x) \in C(\mathbb{R}^n) \text{ pro } \forall |\alpha| \le k \big\}$$
$$C^k_c(\mathbb{R}^n) = C_c(\mathbb{R}^n) \cap C^k(\mathbb{R}^n)$$

Zde $k = 1, \dots, \infty$.

Věta 6.5: ***[Hustota hladkých funkcí v L^p.]** Pro libovolné $p \in [1, \infty)$ je množina $C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ hustá v $L^p(\mathbb{R}^n)$, tj. Věta 6.5

$$\Big(\forall f \in L^p(\mathbb{R}^n)\Big)\Big(\forall \varepsilon > 0\Big)\Big(\exists \varphi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)\Big)\big[\|f - \varphi\|_{L^p} < \varepsilon\big]$$

Důkaz věty 6.5: Vynecháváme.

□

Poznámka 6.4:
- "hluboké" tvrzení o Lebesgueově integrálu.
- důsledek (fakticky ekvivalentní): ke každé funkci $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ existuje posloupnost funkcí $\varphi_n \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ tak, že $\varphi_n \to f$ v normě $L^p(\mathbb{R}^n)$.
- pozor: neplatí pro $p = \infty$.

Věta 6.6: **[Nulovost F.t. v nekonečnu.]** Nechť $f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Potom $\hat{f}(\xi) \to 0$ pro $|\xi| \to \infty$. Věta 6.6

Důkaz věty 6.6: Nechť je $\varepsilon > 0$ dáno. Najdu $R > 0$ tak, že $|\hat{f}(\xi)| < 2\varepsilon$ pro $|\xi| > R$.

1. krok:

V.6.5 $\Rightarrow \exists \varphi(x) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)(\mathbb{R}^n) : \|f - \varphi\|_1 < \varepsilon$

V.6.1: $\left\|\hat{f} - \hat{\varphi}\right\|_{\mathcal{C}_0} \leq \|f - \varphi\|_1$, tj.

$$|\hat{f}(xi) - \hat{\varphi}(\xi)| \leq \|f - \varphi\|_1 < \varepsilon \quad \text{pro } \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

2. krok: Definuji pomocnou funkci $\psi = \varphi - \Delta\varphi$. Určitě platí $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)(\mathbb{R}^n)$, lze užít Důsledek (zobecnění) věty 6.4:

$$\Delta = \sum \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}. \qquad \text{Tedy}$$

$$\widehat{\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}}(\xi) = (2\pi i \xi_j)^2 \hat{f}(\xi).$$

Tedy

$$\boxed{\widehat{-\Delta\varphi}(\xi) = 4\pi^2 |\xi|^2 \hat{\varphi}}$$

Odtud

$$\underbrace{\hat{\psi}(\xi)}_{\text{omezená fce}, \psi \in L^1} = \underbrace{(1 + 4\pi^2 |\xi|^2)}_{\to +\infty} \cdot \underbrace{\hat{\varphi}(\xi)}_{\to 0 \text{ pro } |\xi| \to \infty}$$

Proč?

$$\hat{\varphi} = \frac{\hat{\psi}}{1 + 4\pi^2 |\xi|^2}, \quad \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L^1$$

V.6.1 $\ldots \hat{\psi}$ omezená

Závěr: $\exists R > 0$ tak, že $|\hat{\varphi}(\xi)| < \varepsilon$ pro $|\xi| > R$.
Dokončení:

$$|\hat{f}(\xi)| = |\hat{f}(\xi) - \hat{\varphi}(\xi) + \hat{\varphi}(\xi)| \leq \underbrace{|\hat{f}(\xi) - \hat{\varphi}(\xi)|}_{<\varepsilon \text{ vždy}} + \underbrace{|\hat{\varphi}(\xi)|}_{<\varepsilon \text{ pro } |\xi| > R}$$

□

Poznámka 6.5: Souvisí s tvrzením: Fourierovy koeficienty $a_k, b_k \to 0$ pro $k \to \infty$.
Opakování: **Hölderova nerovnost:**

$$\int_\Omega |f(x) \cdot g(x)| \, dx \leq \underbrace{\left[\int_\Omega |f(x)|^p \, dx\right]^{1/p}}_{\|f\|_p} \cdot \underbrace{\left[\int_\Omega |f(x)|^q \, dx\right]^{1/q}}_{\|g\|_q},$$

kde $p, q \in (1, \infty) : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Definice 6.3: **[Konvoluce.]** Pro $f(x)$, $g(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ definuji konvoluci Definice

$$[f * g](x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) g(y) \, dy, \qquad \text{pokud má integrál smysl.}$$

Věta 6.7: [Vlastnosti konvoluce.] Věta 6.7

(1) komutativita: $[f * g](x) = [g * f](x)$

(2) Nechť $f(x) \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g(x) \in L^q(\mathbb{R}^n)$, kde $1/p + 1/q = 1$. Potom $[f * g](x)$ má smysl pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$ a platí odhad

$$|[f * g](x)| \leq \|f\|_p \|g\|_q \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n .$$

(3) Nechť $f(x)$, $g(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Potom $[f * g](x)$ má smysl pro skoro všechna $x \in \mathbb{R}^n$ a platí odhad

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1 .$$

Důkaz věty 6.7:

(1) $[g * f](x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y) f(y)\, dy = \ldots$
substituce x pevné: $x - y = z \Rightarrow y = x - z,\ dy = dz, \mathrm{J} = 1$
$\ldots = \int_{\mathbb{R}^n} g(z) f(x-z)\, dz = [f * g](x)$

(2):

$$\begin{aligned} |[f * g](x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| \cdot |g(y)|\, dy \quad \text{/Hölder; } x \text{ pevné} \\ &\leq [|f(x-y)|^p\, dy]^{1/p} \cdot \underbrace{[|g(y)|^q\, dy]^{1/p}}_{\|g\|_q} \end{aligned}$$

Substituce $x - z = y$, posunutí $\Rightarrow$

$$\ldots \leq \underbrace{[|f(z)|^p\, dz]^{1/p}}_{\|f\|_p} \cdot \|g\|_q = \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

Dokázali jsme, že $\int$ definující konvoluci konverguje pro $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Také jsme dokázali rovnost, kterou jsme chtěli dokázat.
(3):

$$|[f * g](x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| \cdot |g(y)|\, dy = h(x)$$

Počítejme $\|f * g\|_1 \leq \|h(x)\|_1 = \ldots$

$$\|h\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| \cdot |g(y)|\, dy \right) dx = \text{ Fubini, nezáporná fce } = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} dx \right) \int_{\mathbb{R}^n} dy = \ldots$$

$$\ldots = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| \cdot \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\, dx}_{\|f\|_1}\, dx \right) dy = \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$$

Dokázali jsme, že $h(x) \in L^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow h(x) < +\infty$ s.v.
$\Rightarrow$ konvoluce je konečná s.v.

$\square$

Věta 6.8: **[Vztah F.t. a konvoluce.]** Nechť $f(x)$, $g(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Potom Věta 6.8

$$\widehat{[f * g]}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)\,.$$

Důkaz věty 6.8: V.6.7: ...$(f * g) \in L^1$... lze počítat F.t. Počítejme:

$$\widehat{[f * g]}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp\{-2\pi i(x,\xi)\} \cdot \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy\right] dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\exp\{-2\pi i(y,\xi)\}g(y) \cdot \exp\{-2\pi i(x-y,\xi)\}f(x-y)}_{h(x,y)}\,dxdy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\exp\{-2\pi i(y,\xi)\}g(y) \cdot \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \exp\{-2\pi i(x-y,\xi)\}f(x-y)\,dx}_{\text{subst. } x-y=z,\, dx=dz} \right) dy = \hat{g}(\xi)\cdot\hat{f}(\xi)$$

Předpoklady Fubiniho: stačí $\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}(h(x,y))\,dxdy < +\infty$
Tento integrál $\le \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\cdot|g(y)|\,dxdy$, Konečnost byla dokázána v předchozí větě.

□

Poznámka 6.6:
- operátor $f(x) \mapsto [Af](x)$ (neformálně) nazveme "lokální", pokud $Af(x_0)$ lze určit z hodnoty $f(x_0)$. Jinak ho nazveme "nelokální".
- derivace, konvoluce ... nelokální operátory, násobení funkcí, konstantou ... lokální operátory
- výhoda F.t.: přeměňuje některé nelokální operátory (derivace, konvoluce) na lokální

- nevýhody F.t.: sama je značně nelokální. Také "rozmazává" nosič - viz následující věta.

Příklad 6.2: $-\Delta u(x) + (u * g)(x) = f(x)$, kde u je neznámá fce, $f(x), g(x)$ dány: Příklad
F.t.: $4\pi^2|\xi|^2\hat{u}(\xi) + \hat{u}(\xi)\hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi)$

$$\hat{u}(\xi) = \frac{\hat{f}}{4\pi^2|\xi|^2\hat{g}(\xi)}.$$

Tedy

$$u(x) = \left(\frac{\hat{f}}{4\pi^2|\xi|^2\hat{g}(\xi)}\right)^{\check{}}(x).$$

Věta 6.9: Nechť $f(x)$ je spojitá funkce, která má omezený nosič. Potom: má-li $\hat{f}(\xi)$ omezený nosič, je nutně $f(x) \equiv 0$. Věta 6.9

Důkaz věty 6.9: $(n = 1)$... nechť $f(x) = 0$ pro $|x| > R$. Potom

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-2\pi i x\xi\}f(x)\,dx = \int_{-R}^{+R} \exp\{-2\pi i x\xi\}f(x)\,dx$$

Klíčové pozorování: integrál je konečný pro $\forall \xi \in \mathbb{C}$. $|f(x)| \leq K$, neboť fce spojitá na kompaktu $[-R, R]$ a 0 jinde.
$\xi = a + ib,\ a, b \in \mathbb{R}$
Re $\{-2\pi i(a+ib)\} = 2\pi xb < 2\pi Rb$
$\Rightarrow \exp\{-2\pi i x\xi\} \leq \exp\{2\pi Rb\}$
$\Rightarrow \hat{f}(\xi)$ je definována pro $\forall \xi \in \mathbb{C}$ a navíc je zde holomorfní: $\hat{f} \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$
holomorfnost:

$$[\hat{f}(\xi)]' = \int_{-R}^{R} \underbrace{-2\pi i x}_{\leq 2\pi R} \underbrace{\exp\{-2\pi i x\xi\}}_{\leq \exp\{-2\pi Rb\}}$$

majoranta: pokud $\xi \leq b$, pak $\hat{f}(\xi)$ má omezený nosič: $\hat{f}(\xi) = 0$ pro $\xi \in \mathbb{R}$; $|\xi| > R_1$.
Potom $\mathcal{N} = \{\xi \in \mathbb{C} : \hat{f} = 0\}\ldots$ má hromadný bod v $\mathbb{C}$.
$\Rightarrow$ věta o jednoznačnosti: $\hat{f} \equiv 0$ v $\mathbb{C}$. Odtud $f \equiv 0$ např. takto:

$$0 = \hat{f}(\xi) = \int_{-R}^{R} f(x)\cos(2\pi\xi x)\,dx - i\int_{-R}^{R} f(x)\sin(2\pi\xi x)\,dx \quad \text{pro } \forall\xi \in \mathbb{C} \quad (\odot)$$

$\Rightarrow$ Fourierovy koeficienty a_k, b_k fce $f(x)$ jsou nulové ($l = 2R$)
v rovnici $(\odot)$ volme $\xi = \frac{k}{2R}$. Lemma 4.4 nám říká, že $f(x) \equiv 0$.

□

Důsledek.
• Nelze docílit toho, aby jak $f(x)$, tak $\hat{f}(\xi)$ měly obě omezený nosič, kromě triviálního případu $f(x) \equiv 0$.
• obecněji platí tzv. princip neurčitosti: čím je nosič f menší, tím je nosič $\hat{f}$ větší - a naopak.

Definice 6.4: **[Gausián.]** Funkce $\exp(-\pi|x|^2)$ se nazývá gausián. Definice

Lemma 6.1: **[F.t. gausiánu.]** Platí Lemma 6.1

$$\left[\widehat{\exp(-\pi|x|^2)}\right](\xi) = \exp(-\pi|\xi|^2)\,.$$

Důkaz lemmatu 6.1:
1. krok: (n=1)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-2\pi i x\xi\}\exp\{-\pi x^2\} = \ldots$$

Trik: $-2\pi x\xi - \pi x^2 = -\pi\xi^2 - \pi(x + i\xi)^2$

$$\ldots = \exp\{-\pi\xi^2\} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-i(x+i\xi)^2\}\,dx}_{I}$$

Zbývá: rozmyslet si, proč $I = 1$?
BÚNO: $\xi > 0$
Pomocná funkce: $f(z) = \exp\{-\pi z^2\}$, integruji přes obdélník: hrany délky $2R$ a $i\xi$, vrcholz v bodech $A[-R, 0]$, $B[R, 0]$, $C[R, i\xi]$, $D[-R, i\xi]$. Čtyři křivky: křivka φ_1 od

A k B, křivka φ_2 od D k C, křivka φ_3 od B k C, křivka φ_4 od A k D.
Označme $\Gamma = \varphi_1 \oplus \varphi_3 \ominus \varphi_2 \ominus \varphi_4$ a $\int_\Gamma = 0$. Tedy

$$0 = \int_\Gamma f(z)\,dz = \int_{\varphi_1} - \int_{\varphi_2} + \int_{\varphi_3} - \int_{\varphi_4}$$

$\varphi_1 : t;\ t \in [-R, R]$:

$$\int_{\varphi_1} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} \exp\{-\pi t^2\}\,dt \to \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\pi t^2\}\,dt = \left|\text{ subst. } \sqrt{\pi}t = u\right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-u^2\}\,du = 1$$

φ_2 :

$$\int_{\varphi_2} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} \exp\{-\pi(t+i\xi)^2\}\,dt \to I$$

$\varphi_3 : R + i\xi t,\ t \in [0,1]$:

$$\int_{\varphi_3} f(z)\,dz = \int_0^1 \exp\{-\pi(R+i\xi t)^2\} \cdot i\xi\,dt \to I$$

$$\text{Re } \left[-\pi(R^2 - \xi^2 t^2 + 2Ri\xi t)\right] = -\pi(R^2 - \xi^2 t^2) \le -\pi(R^2 - \xi^2)$$

$$\left|\int_{\varphi_3}\right| \le 1 \cdot \xi \exp\{-\pi(R^2 - \xi^2)\} \text{ pro } R \to 0,\ \xi \text{ pevné} \to 0$$

Podobně φ_4.
2. krok: (n obecné)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-2\pi i(x,\xi)\} \exp\{-\pi |x|^2\} = \ldots$$

$(x,\xi) = x_1\xi_1 + \ldots + x_n\xi_n$, $|x|^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2$;
Fubini: $\int_{\mathbb{R}^n} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \ldots \int_{\mathbb{R}^n} \ldots dx_1 \ldots dx_n$

$$\ldots = \int_{\mathbb{R}^n} \exp\{-2\pi i x_1\xi_1\} \cdot \exp\{-\pi x_1^2\} \ldots \int_{\mathbb{R}^n} \exp\{-2\pi i x_n\xi_n\} \cdot \exp\{-\pi x_n^2\} =$$

$$= \exp\{-\pi\xi_1^2\} \cdot \ldots \cdot \exp\{-\pi\xi_n^2\} = \exp\{-\pi\xi^2\}$$

Předpoklady Fubiniho: gausián $\exp\{-\pi|\xi|^2\} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Lemma 6.2: **[Integrace radiálních funkcí.]** Nechť $0 \le r < R \le +\infty$. Potom Lemma 6.2

$$\int_{\{x\in\mathbb{R}^n:\ 0<|x|<R\}} f(|x|)\,dx = \kappa_{n-1} \int_r^R f(\rho)\rho^{n-1}\,d\rho\,,$$

kde κ_{n-1} je $(n-1)$-rozměrná míra mnoľiny $S_{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n :\ |x| = 1\}$.

Důkaz lemmatu 6.2: Idea: křivočará Fubiniho věta:

$$LS = \int_r^R \left(\underbrace{\int_{|x|=\rho} f(|x|)\, d\sigma_{n-1}}_{I(\rho)} \right) d\rho$$

$$I(\rho) = f(\rho)\sigma_{n-1}\{x \in \mathbb{R}^n : |x| = \rho\} = f(\rho)\, \underbrace{\sigma_{n-1}\{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}}_{K_{n-1}}\, \rho^{n-1}$$

σ_{n-1} jsme nezaváděli, kromě

- σ_1 ... délka křivky
- σ_2 ... plošný obsah plochy

□

Poznámka 6.7:
• aplikace: $\int_{|x|>1} |x|^a \, dx$ konverguje $\iff a < -n$ (jsme v $\mathbb{R}^n$.)
• lze dopočítat, ľe $\kappa_{n-1} = n\pi^{n/2}/\Gamma(n/2+1)$; speciálně: $\kappa_1 = 2\pi$ (obvod kruľnice), $\kappa_2 = 4\pi$ (povrch sféry.)

Definice 6.5: **[Schwartzův prostor.]** Schwartzův prostor (prostor rychle klesajících funkcí) definujeme jako Definice

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \; x^\alpha D^\beta f(x) \;\text{ omezená pro } \forall \;\; \alpha, \beta \right\}.$$

Ekvivalentně: $p(x)D^\beta f(x)$ je omezená pro všechna β a všechny polynomy $p(x)$ proměnných $x_1, \ldots, x_n$.

Věta 6.10: **[Vlastnosti $\mathcal{S}$.]** Věta 6.10

(1) $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subsetneq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

(2) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ pro $\forall p \in [1, +\infty]$

(3) $f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \implies x^\alpha f(x),\, D^\beta f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

(4) $f(x) \in \mathbb{R}^n \implies \hat{f}(\xi),\, \check{f}(\xi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Důkaz věty 6.10:

(1): $f(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)(\mathbb{R}^n) \ldots f(x) = 0$ pro $|x| > R$
$x^\alpha D^\beta f(x)$... spojitá na kompaktu $K = \{|x| \le R\} \Rightarrow$ omezená na K, nula vně $K \Rightarrow$ omezená v $\mathbb{R}^n$
např.: $f(x) = \mathrm{e}^{-|x|^2} \in \mathcal{S} \setminus C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \ldots ?\in \mathcal{S}$
$x^\alpha D^\beta \mathrm{e}^{-|x|^2} = \underbrace{p(x)\mathrm{e}^{-|x|^2}}_{\to 0 \text{ pro } |x|\to\infty}$, $p(x)$ polynom
$\Rightarrow$ omezená v $\mathbb{R}^n$

(2): $\mathcal{S} \subset L^\infty$ ... zjevné. Ale co případ $\mathcal{S} \subset L^p$?
Pro $p \in [1, +\infty) \ldots p(x)f(x)$ omezená pro každý polynom.

Speciálně pro $p(x) = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^k = |x|^{2k}$, kde $k \in \mathbb{N}$. Platí $|f(x)| \leq K|x|^{-2k}$, a tedy i $|f(x)|^p \leq K^p|x|^{-2kp}$ ... stačí $-2kp, -n \Rightarrow |f(x)|^p$ integrovatelná majoranta. Integrovatelnost přes omezené množiny jasná (dle poznámky k L.6.2)

(3) dcv.

(4) V.6.4:

$$[\widehat{D^\alpha f(x)}](\xi) = c_\alpha \xi^\alpha \hat{f}(\xi); \quad [\widehat{D^\beta f(x)}](\xi) = c_\beta[\widehat{x^\beta f(\xi)}]$$

$f(x) \in \mathcal{S} \overset{?}{\Rightarrow} \hat{f}(x) \in \mathcal{S}$; tj. $\xi^\alpha D^\beta \hat{f}(\xi)$ omezená?

$$= c_\beta \xi^\alpha [\widehat{x^\beta f(x)}](\xi) = c_\alpha c_\beta [D^\alpha \widehat{\xi x^\beta f}(x)](\xi)$$

$[\ldots] \in \mathcal{S}$ ... bod (3) $\Rightarrow [\ldots] \in L^1$ ... bod (2) $\Rightarrow \widehat{[\ldots]}$ omezená (V.6.1).

□

Věta 6.11: [O inverzi F.t.] Nechť $f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Potom $\mathcal{F}_{-1}[\mathcal{F}f] = \mathcal{F}[\mathcal{F}_{-1}f] = f$. Věta 6.11

Důkaz věty 6.11: zvol $x \in \mathbb{R}^n$ pevně. Cíl: $[\hat{f}(x)]\check{}(x) = f(x)$.

1. verze důkazu: (nesprávná, názorná)

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{2\pi i(x,\xi)} \hat{f}(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{2\pi i(x,\xi)} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-2\pi i(\xi,y)} f(y)\, dy d\xi =$$

$$\overset{\text{Fubiniho nemůžeme použít}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \left[\underbrace{\int_{\mathbb{R}^n \mathrm{e}^{2\pi i(\xi,x-y)}} d\xi}_{h_x(y)} \right] dy,$$

$$\text{kde } h_x(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \cos[2\pi\xi(x-y)]\, d\xi + i \int_{\mathbb{R}^n} \sin[2\pi\xi(x-y)]\, d\xi \text{ - neexistují}$$

$$h_x(y) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \neq y \text{ ()oscilace se zruší} \\ +\infty & \text{pro } x = y \end{cases}$$

Smělý závěr: $h_x(y) = \delta_x(y)$; $\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\delta_x(y)\, dy = f(x)$

2. verze důkazu: vložím $\mathrm{e}^{-\varepsilon|\xi|^2}$, pošlu $\varepsilon \to 0$:

$$I = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} f(y) \mathrm{e}^{-\varepsilon|\xi|^2} \mathrm{e}^{2\pi i(x,\xi)} \mathrm{e}^{-2\pi i(\xi,y)}\, dy d\xi = |\text{FV, majoranta } |f(y)| \cdot |\mathrm{e}^{-\varepsilon|\xi|^2}| = \ldots$$

1. výpočet

$$I = \int \left(\int \ldots\, dy \right) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\varepsilon|\xi|^2} \mathrm{e}^{2\pi i(x,\xi)} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-2\pi i(y,\xi)} f(y)\, dy}_{\hat{f}(\xi)}\, d\xi =$$

$$I = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\varepsilon|\xi|^2} \mathrm{e}^{2\pi i(x,\xi)} \hat{f}(\xi)\, d\xi$$

Pro $\varepsilon \to 0+ \ldots \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{2\pi i(x,\xi)} \hat{f}(\xi)\, d\xi = [\hat{f}(\xi)]\check{}(x)$. Záměna limity a integrálu: majoranta $\hat{f}(\xi) \in L^1$, zbytek $|\ldots| \leq 1$

2. výpočet

$$I = \int \left(\int \ldots\, d\xi \right) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\varepsilon|\xi|^2} \mathrm{e}^{-2\pi i(\xi, y-x)}\, d\xi dy =$$

substituce $y - x = z$, J $= 1$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(x+z) \underbrace{\mathrm{e}^{-\varepsilon|\xi|^2} \mathrm{e}^{-2\pi i(\xi,x)}\, d\xi}_{[\widehat{\mathrm{e}^{-\varepsilon|\xi|^2}}]} dz = \ldots$$

Pomocný výpočet: víme, že $[\widehat{\mathrm{e}^{-\pi|x|^2}}](\xi) = \mathrm{e}^{-\pi|\xi|^2}$. Také víme

$$[\widehat{f(cx)}](\xi) = \frac{1}{c^n} \hat{f}(\xi/c) \text{ pro } \forall c > 0.$$

Tedy

$$\mathrm{e}^{-\varepsilon|x|^2} = \mathrm{e}^{-\varepsilon(cx)^2}, \quad \text{kde } c = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\pi}}$$

konec pomocného výpočtu.

$$\ldots = \int_{\mathbb{R}^n} f(x+z) \underbrace{\left(\frac{\pi}{\varepsilon}\right)^{n/2} \mathrm{e}^{-\frac{\pi^2}{\varepsilon}|z|^2}}_{(*)} dz \overset{\text{subst.}}{=}$$

substituce: $\pi^2/\varepsilon|z|^2 = |u|^2$, $z = \sqrt{\varepsilon}u/\pi$, J $= \varepsilon^{n/2}/\pi^n$
(*) aproximuje δ_0 pro $\varepsilon \to 0+$.
Nechť $\varepsilon \to 0+$:

$$f(x) \int_{\mathbb{R}^n} \pi^{n/2} \mathrm{e}^{-|u|^2}\, du = f(x) \pi^{n/2} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-|u|^2}\, du}_{\pi^{n/2}} = f(x)$$

Záměna limity a integrálu: $|f| \leq K$, $\mathrm{e}^{-|u|^2} \in L^1$.

□

Poznámka 6.8:
- uvedený důkaz projde za slabších předpokladů: $f \in L^1 \cap C_b$, $\hat{f} \in L^1$.
- důsledek: $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ je vzájemně jednoznačné zobrazení

Lemma 6.3: Nechť $f(x), g(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Potom Lemma 6.3

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) g(x)\, dx\,, \quad \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\check{g}(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \check{f}(x) g(x)\, dx\,.$$

Důkaz lemmatu 6.3: (1. rovnost)

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-2\pi i(x,\xi)} g(y)\,dy\right] dx \overset{FV}{=} \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-2\pi i(x,\xi)} f(x)\,dx}_{\hat{f}(y)}\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) g(x)$$

Předpoklady FV: majoranta $|f(x)| \cdot |g(y)| \in L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$.

□

Lemma 6.4: * Nechť $f(x) \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Pokud Lemma 6.4

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\,dx = 0 \qquad \forall \varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\,,$$

potom $f(x) = 0$ s.v. v $\mathbb{R}^n$.

Důkaz lemmatu 6.4: Bez důkazu.

□

Poznámka 6.9:
• "hluboké" tvrzení o Lebesgueově integrálu, příbuzné s Větou 6.5.
• ekvivalentně: $\lambda_n\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\} > 0 \implies \exists \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tak, ľe $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x) \neq 0$.
• za silnějšího předpokladu $f(x)$ spojitá dokázáno v minulém semestru: Lemma 3.1.

Věta 6.12: **[Inverze F.t. v L^1.]** Nechť $f(x)$, $\hat{f}(\xi) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Potom $[\hat{f}(\xi)]\check{}(x) = f(x)$ pro s.v. $x \in \mathbb{R}^n$. Věta 6.12

Důkaz věty 6.12: Zvolme $\varphi(x) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)(\mathbb{R}^n)$ libovolně:

$$\int_{\mathbb{R}^n} [\hat{f}]\check{\varphi}\,dx \overset{L.6.3}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}\check{\varphi}\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f\hat{\check{\varphi}}\,dx \overset{V6.11,\ \varphi\in\mathcal{S}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f\varphi\,dx$$

Tedy

$$\int_{\mathbb{R}^n} ([\hat{f}]\check{-}f)\varphi\,dx = 0,$$

φ libovolné, L.6.4: $[\hat{f}]\check{=}f$ s.v.

□

Poznámka 6.10:
• důsledek: tzv. věta o jednoznačnosti: $f \in L^1$, $\hat{f} = 0 \implies f = 0$ s.v.
• speciálně: $\mathcal{F}$ je prostá v L^1.

Věta 6.13: **[Plancherelova rovnost.]** Nechť $f(x)$, $g(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Potom Věta 6.13

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}\,d\xi\,.$$

Jinými slovy, $\mathcal{F}$ zachovává skalární součin v $L^2(\mathbb{R}^n)$, speciálně zachovává normu.

Důkaz věty 6.13:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\overline{g} \overset{V.6.11}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \check{\hat{f}}\overline{g} \overset{L.6.3}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}\overline{\hat{g}}$$

□

Věta 6.14: [F.t. v L^2.] Věta 6.14

(1) Fourierovu transformaci (chápanou jako zobrazení z $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ do $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$) lze rozšířit na zobrazení z $L^2(\mathbb{R}^n)$ do $L^2(\mathbb{R}^n)$.

(2) Toto rozšíření je izomorfismus $L^2(\mathbb{R}^n)$ na sebe, tj. vzájemně jednoznačné zobrazení, zachovávající normu.

Důkaz věty 6.14:

(1): $f(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ dáno; V.6.5 (o hustotě) $\ldots \exists \varphi_n \in \mathcal{S}$ tak, že $\varphi_n \to \varphi$ v normě L^2, tedy $\{\varphi_n\}$ je cauchyovská v L^2
V.6.13 (Plancherel): $\{\hat{\varphi}_n\}$ je cauchyovská v L^2, L^2 je úplný: pak $\exists g(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tak, že $\varphi_n \to \varphi$ v L^2; polož $f = g$
Korektnost definice? jiná posloupnost $\psi_n \in \mathcal{S}$, $\psi_n \to f$ v L^2, $\varphi_n - \psi_n \to 0$v L^2
V.6.13: $\hat{\varphi}_n - \hat{\psi}_n \to 0$ v L^2; $\hat{\varphi}_n \to g \ldots \hat{\psi} \to g$
Je to rozšíření: $f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$: lze volit $\varphi_n = f$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$; potom $\hat{\varphi}_n = \hat{f}$, hledané $g = \hat{f}$ počítané dle standardní definice.

(2): zachování $\langle \cdot, \cdot \rangle \ldots$ skalární součin v $L^2(\mathbb{R}^n)$
$f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ dány. Existují $\varphi_n \psi_n \in \mathcal{S}$ tak, že $\varphi_n \to f$, $\psi_n \to g$ a $\hat{\varphi}_n \to \hat{f}$, $\hat{\psi}_n \to \hat{g}$ dle normy L^2.
V.6.13: $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se zachovává v $\mathcal{S}$: $\langle \varphi_n, \psi_n \rangle = \langle \hat{\varphi}_n, \hat{\psi}_n \rangle$ pro $n \to \infty$; spojitost skalárního součinu vůči konvergenci dle normy:
$\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$
$\Rightarrow$ zachovává normu, je prosté

Zdalipak je také na?
$g(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ dáno: Zdalipak $\exists f(x) \in L^2$ tak, že $\hat{f} = g$?
Věta o hustotě: $\exists \psi_n \in \mathcal{S}$, $\psi_n \to g$ v L^2, polož $\varphi_n = \check{\psi}_n$, $\{\varphi_n\}$ je cauchyovská v L^2, jej9 limita $f \in L^2$ je hledaný vzor g.

□

Poznámka 6.11:
• věta nedává praktický návod, jak $\hat{f}$ pro obecnou f počítat
• pokud $f \in L^2 \cap L^1$, lze pouľít standardní definici
• pro $f \in L^2 \setminus L^1$ lze použít zobecněnou definici

$$\hat{f}(\xi) = \lim_{R \to \infty} \int_{|x|<R} e^{-2\pi i (x,\xi)} f(x)\, dx\,.$$

Poznámka 6.12:
• míra Ω konečná ... $L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ pro $p > q$. Opačná inkluze neplatí: $x^{-1/2} \in L^1(0,1) \setminus L^2(0,1)$.
• míra Ω nekonečná ... neplatí ani jedna inkluze: $\frac{1}{1+x} \in L^2(0,+\infty) \setminus L^1(0,+\infty)$.

Poznámka 6.13:
• definujeme operátory $X : f(x) \to x f(x)$, $D : f(x) \to \frac{1}{2\pi i} f'(x)$
• Věta 6.4. ... $\widehat{Df}(\xi) = \xi \hat{f}(\xi)$
• operátory X, D jsou samoadjungované v $L^2(\mathbb{R}^n)$, tj. $\langle Xf, g \rangle = \langle f, Xg \rangle$, totéž pro D.

• platí $[DX - XD](f) = \frac{1}{2\pi i} f$
• veličina:

$$\frac{\|Xf\|_2}{\|f\|_2} = \left(\frac{\int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 \, dx}{\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, dx} \right)^{1/2}$$

vyjadřuje míru rozptýlenosti nosiče f od 0. Totéž vyjadřuje $\frac{\|Df\|_2}{\|f\|_2}$ pro $\hat{f}$.
• srovnej následující větu s Větou 6.9.: $f(x)$ má omezený nosič a $f(x) \not\equiv 0$, pak $\hat{f}(\xi)$ nemá omezený nosič
• lze ukázat, že rovnost ve Větě 6.15. nastane pouze pro funkci typu e^{-ax^2}

Věta 6.15: [Princip neurčitosti.] Nechť $f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $f(x) \not\equiv 0$. Potom Věta 6.15

$$\frac{\|Xf\|_2}{\|f\|_2} \frac{\|Df\|_2}{\|f\|_2} \geq \frac{1}{2\pi} .$$

Důkaz věty 6.15: Zvol $\lambda \in \mathbb{R}$ libovolně:

$$0 \leq \|(\lambda X + iD)f\|_2^2 = \langle (\lambda X + iD)f, (\lambda X + iD)f \rangle =$$

$$= \lambda^2 \|Xf\|_2^2 + \|Df\|_2^2 + \underbrace{\langle iDf, \lambda Xf \rangle + \langle \lambda Df, iDf \rangle}_{(*)},$$

kde

$$(*) = i\lambda \langle \underbrace{(XD - DX)f}_{-\frac{\lambda}{2\pi i} f}, f \rangle$$

Celkem tedy

$$0 \leq \lambda^2 \|Xf\|_2^2 - \frac{\lambda}{2\pi} \|f\|_2^2 + \|Df\|_2^2 \ldots \text{kvadratická fce } \lambda$$

$$\Delta\ e0 : \frac{\|f\|_2^4}{4\pi^2} - 4 \|Xf\|_2^2 \|Df\|_2^2 \leq 0,$$

což upravíme na

$$\frac{1}{16\pi^2} \leq \frac{\|Xf\|_2^2 \|Df\|_2^2}{\|f\|_2^4}$$

□

Poznámka 6.14: Názorně: čím je f koncentrovanější, tím je $\hat{f}$ rozptýlenější a opačně.

Kapitola 7

Laplaceova transformace

Pojmy v kapitole 7: Prostor L^1_+, Laplaceova transformace (L.t.), konvoluce. Věta o základních vlastnostech L.t., o dalších vlastnostech L.t., o L.t. a derivaci, o konvoluci v L^1_+, o L.t. a kovoluci, o prostotě L.t., o inverzi L.t.

Definice 7.1: **[Prostor L^1_+.]** Definujeme prostor Definice

$$L^1_+ := \left\{ f(t) : (0,+\infty) \to \mathbb{C} \text{ měřitelná a } \exists\, c\; in\mathbb{R},\; f(t)e^{-ct} \in L^1(0,+\infty) \right\}.$$

Poznámka 7.1:
• $L^1_+ \supsetneq L^1(0,+\infty)$
• $f \in L^1_+ \implies f \in L^1(0,K)$ pro $\forall K < +\infty$ (tj. je lokálně integrovatelná)
• $f(t) = e^{t^2} \notin L^1_+$

Úmluva značení 7.1: Pro $f(t) \in L^1_+$ značíme Úmluva

$$c_f = \inf \left\{ c \in \mathbb{R} :\; f(t)e^{-ct} \in L^1(0,+\infty) \right\}$$

Obecně $f(t)e^{-c_f t} \notin L^1$, ale pro libovolné $c > c_f$ je $f(t)e^{-ct} \in L^1$.

Definice 7.2: **[Laplaceovu transformace.]** Laplaceovu transformaci funkce $f(t) \in L^1_+$ definujeme Definice

$$\mathcal{L}\{f(t)\}[p] = F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\, dt \qquad \forall p \in \mathbb{C},\; \operatorname{Re} p > c_f\,.$$

Poznámka 7.2:
• přiřazuje funkci $f(t)$ funkci $F(p)$
• definice je korektní: $|f(t)|e^{-\operatorname{Re} pt}$ integrovatelná majoranta
• souvislost s Fourierovou transformací:

$$F(p) = \left[\widehat{f(x)\chi(x)e^{-\operatorname{Re} px}}\right]\left(\frac{\operatorname{Im} p}{2\pi}\right),$$

kde

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x > 0, \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

Věta 7.1: [Základní vlastnosti L.t.] Nechť $f(t) \in L^1_+$. Potom Věta 7.1

(1) $F(p) \in \mathcal{H}\big(\{p \in \mathbb{C} : \ \operatorname{Re} p > c_f\}\big)$

(2) $\frac{d^k}{dp^k} F(p) = \mathcal{L}\big\{(-t)^k f(t)\big\}[p]$ pro $\forall k \in \mathbb{N}$

(3) $F(p) \to 0$ pro $\operatorname{Re} p \to +\infty$, $\operatorname{Im} p \in \mathbb{R}$ pevné

(4) $F(p) \to 0$ pro $\operatorname{Im} p \to \pm\infty$, $\operatorname{Re} p > c_f$ pevné

Důkaz věty 7.1:

(1) formálně:

$$\frac{d}{dp} F(p) = \int_0^\infty f(t)(-t) \exp\{-pt\}\, dt,$$

tj. (1), (2) pro $k = 1$ platí, pokud lze zaměnit integrál a derivaci $\frac{d}{dp}$.
majoranta: $p_0 \in \mathbb{C}$: Re $p_0 > c_f$
Zvolme $\delta > 0, c_1, c_2$ tak, že $c_f < c_1 < c_2 <$ RE $p_0 - \delta$=nl Tvrdím, že $p \in \mathcal{U}(p_0, \delta)$ libovolné tak, že

$$|f(t)| \cdot |t| \cdot |\exp\{-pt\}| = |f(t)| \cdot |t| \cdot \exp\{-\mathrm{Re}(p)t\} \leq$$

$$\leq |f(t)| \cdot |t| \cdot \exp\{-c_2 t\} = |f(t)| \cdot \exp\{-c_1 t\} \cdot |t| \cdot \exp\{-t(c_2 - c_1)\}$$

majoranta: nezávisle na $p \in \mathcal{U}(p_0, \delta)$

$$|f(t)| \exp\{-c_1 t\} \in L^1; \quad |t| \cdot \exp\{-t(c_2 - c_1)\} \ldots \text{ omezená},$$

tj. záměna integrálu a derivace $\frac{d}{dp}$ platí na $\mathcal{U}(p_0, \delta)$

(2): pro $k = 2, 3, \ldots$ podobně

(3):

$$F(p) = \int_0^\infty f(t) \underbrace{\exp\{-pt\}}_{\to 0 \text{ pro Re } p \to \infty} dt \to 0, \text{ záměna limity a integrálu}$$

Lebesgueova věta: majoranta: $|f(t) \exp\{-pt\}| \leq |f(t)| \cdot \exp\{-ct\}$, kde $c > c_f$ libovolné, pevné. Majoranta pro Re $p > c$.

(4): jemnější důvody:

$$F(p) = \int_0^\infty f(t) \exp\{-\text{Re } pt\} \cdot [\cos(-\text{Im } pt) + i \sin(-\text{Im } pt)]\, dt =$$

$$= \left[\widehat{\underbrace{f(x)}_{\in L^1(\mathbb{R})} \chi_{(0,+\infty)} \exp\{-\text{Re } px\}}\right] \left(\frac{\text{Im} p}{2\pi}\right)$$

V.6.6: $\to 0$ pro $|\text{Im } p| \to +\infty$.

$\square$

Příklad 7.1: Příklad

- $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{p}$ $(c_f = 0)$
- $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{p-a}$, $\operatorname{Re} p > a = c_f$
- $\mathcal{L}\{t^\alpha\} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$, $\operatorname{Re} p > 0 = c_f$, pro $\alpha > -1$. Speciálně: $n \in \mathbb{N}$: $\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{p^{n+1}}$.

Věta 7.2: **[Vlastnosti L.t.]** Nechť $f(t) \in L^1_+$. Potom Věta 7.2

(1) $\mathcal{L}\big\{f(\alpha t)\big\}[p] = \frac{1}{\alpha}\mathcal{L}\big\{f(t)\big\}[p/\alpha]$ pro $\alpha > 0$, $\operatorname{Re} p > \alpha c_f$

(2) $\mathcal{L}\big\{f(t-\alpha)\big\}[p] = e^{-at}\mathcal{L}\big\{f(t)\big\}[p]$ pro $\alpha > 0$, $\operatorname{Re} p > c_f$

(3) $\mathcal{L}\big\{e^{at}f(t)\big\}[p] = \mathcal{L}\big\{f(t)\big\}[p-a]$ pro $a \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a + c_f$

Důkaz věty 7.2:

(1)

$$\int_0^\infty f(\alpha t)\exp\{pt\}\,dt = |\text{subst. } \alpha t = u| = \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty f(u)\underbrace{\exp\left\{-\frac{p}{\alpha}u\right\}}_{\operatorname{Re}\frac{p}{\alpha} > c_f}\,du = \frac{1}{\alpha}F\left(-\frac{p}{\alpha}\right)$$

(2)

$$\int_0^\infty f(t-\alpha)\exp\{-pt\}\,dt = |\text{subst. } t-\alpha = u| = \exp\{-p\alpha\}\int_0^\infty f(u)\exp\{-pu\}\,du =$$

$\alpha > 0, f(u) = 0$ pro $u < 0$ ... z úmluvy

$$= \exp\{-p\alpha\}F(p)$$

(3)

$$\int_0^\infty f(t)\underbrace{\exp\{at\}\exp\{-pt\}}_{\exp\{-(p-a)t\}}\,dt = F(p-a)$$

konverguje pro $\operatorname{Re}(p-a) > c_f$.

□

Věta 7.3: **[L.t. a derivace.]** Nechť $f^{(j)}(t) \in L^1_+ \cap C([0,+\infty))$ pro $j = 0,\dots,n$. Potom Věta 7.3

$$\mathcal{L}\big\{f^{(n)}(t)\big\}[p] = p^n F(p) - \sum_{j=0}^{n-1} p^j f^{(n-1-j)}(0)\,.$$

Speciálně

$$\mathcal{L}\big\{f'(t)\big\}[p] = pF(p) - f(0)\,,$$
$$\mathcal{L}\big\{f''(t)\big\}[p] = p^2F(p) - f'(0) - pf(0)\,.$$

Důkaz věty 7.3: $(k = 1)$:

$$\int_0^\infty f'(t)\exp\{-pt\}\,dt = [f(t)\exp\{-pt\}]_0^\infty - \int_0^\infty f(t)(-p)\exp\{-pt\}\,dt = -f(0) + pF(p)$$

indukční krok: $f(t)\exp\{-pt\}$ pro $t \to \infty$ pro vybranou posloupnost t_n:

$$\mathcal{L}\{f^{(n+1)}(t)\}[p] = \mathcal{L}\{[f^(n)]'\}[p] = p\mathcal{L}\{f^{(n)}\}[p] - f^{(n)}(0) =$$

$$= p\{p^n F(p) - \sum_{j=0}^{\infty} p^j f^{(n-1-j)}(0)\} - f^{(n)}(0) =$$

$$= p^{n+1}F(p) - \{f^{(n)}(0) + \sum_{j=0}^{(n+1)-1} p^{j-1} f^{(n+1)-j}\} =$$

$$= p^{n+1}F(p) - \{f^{(n)}(0) + \sum_{l=1}^{(n+1)-1} p^l f^{(n+1)-1-l}\},$$

tj. (1) pro $k = n+1$.

□

Příklad 7.2: $u' + u = 1$, $t > 0$ $\;/\mathcal{L}\;$ $\mathcal{L}\{u\} = U$ Příklad
$u(0) = 0$

$$pU(p) - u(0) + U(p) = \frac{1}{p} \Rightarrow U(p) = \frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$$

Definice 7.3: [Konvoluce.] Pro $f(t)$, $g(t) \in L^1_+$ definujeme konvoluci Definice

$$\big[f * g\big](t) = \int_0^t f(s)g(t-s)\,ds \qquad t > 0$$

a nula pro $t < 0$.

Úmluva značení 7.2: Funkce z L^1_+ automaticky klademe rovné nula pro $t < 0$. Úmluva

Lemma 7.1: [Konvoluce v L^1_+.] Lemma 7.1

(1) Nová definice konvoluce je ve shodě s definicí kapitoly 6.

(2) $f,\ g \in L^1_+ \implies [f * g](t)$ má smysl pro s.v. t a je prvkem L^1_+. Navíc: $c_{f*g} \le \max\{c_f, c_g\}$.

Důkaz lemmatu 7.1:

(1)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{f(s)}_{=0 \text{ pro } s<0} g(t-s)\,ds = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \int_0^t \dots & t > 0 \end{cases}$$

(2)

$$|f(t)| \le \exp\{c_1 t\}\varphi(t),\ \ \varphi(t) \in L^1(0,+\infty)$$
$$|g(t)| \le \exp\{c_2 t\}\psi(t),\ \ \psi(t) \in L^1(0,+\infty)$$

BÚNO $\varphi, \psi = 0$ pro $t < 0$, $c_1 = c_2$

$$|(f*g)(t)| \le \int_0^t \varphi(s)\exp\{cs\}\psi(t-s)\exp\{c(t-s)\}\,ds = \exp\{ct\}(\varphi * \psi)(t),$$

kde $(\varphi * \psi)$ má smysl pro s.v. t, $(\varphi * \psi) \in L^1$
vedlejší produkt: $c_{(f*g)} \leq \max\{c_f, c_g\} \;\Rightarrow\; (f*g) \in L^1_+$

$\square$

Věta 7.4: **[L.t. a konvoluce.]** Nechť $f(t)$, $g(t) \in L^1_+$. Potom Věta 7.4

$$\mathcal{L}\big\{[f*g](t)\big\}[p] = \mathcal{L}\{f(t)\}[p]\,\mathcal{L}\{g(t)\}[p]\,, \qquad \operatorname{Re} p > \max\{c_f, c_g\}\,.$$

Důkaz věty 7.4:

$$\int_0^\infty \left(\int_0^t f(s)g(t-s)\,ds\right)\exp\{-pt\}\,dt =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^t f(s)\exp\{-ps\}g(t-s)\exp\{-p(t-s)\}\,dsdt =$$

$$= \int_0^\infty \left(f(s)\exp\{-ps\} \underbrace{\int_s^\infty g(t-s)\exp\{p(t-s)\} =, dt}_{\text{subst. } t-s=u} \right) ds = \mathcal{L}\{g\}[p]\mathcal{L}\{f\}[p]$$

$\square$

Důsledek. [L.t. primitivní funkce.] Nechť $f(t) \in L^1_+$. Označ $h(t) = \int_0^t f(s)\,ds$. Pozorování: $h = f * 1$. Tedy $\mathcal{L}h[p] = F(p)/p$. Navíc: $c_f \leq \max\{c_f, 0\}$.

Příklad 7.3: Příklad

$$y(t) = \frac{1}{2}\int_0^t s^2 u(t-s)\,ds + t = \left[u * \frac{\mathrm{Id}^2}{2}\right](t+t) \quad /\mathcal{L} \quad \mathrm{Id}^2 : t \to t^2$$

substituce $t - s = u$:

$$\int_0^t u(s)(t-s)^2\,ds$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{t^2}{2}\right\} = \frac{1}{p^3}$$

$$U(p) = U(p)\frac{1}{p^3} + \frac{1}{p^2}$$

$$U(p) = \frac{1}{p^2}\frac{1}{1-\frac{1}{p^3}} = \frac{p^3}{p^2(p^3-1)} = \frac{p}{p^3-1}$$

Nechť $p^3 = 1$. Tedy
$z_1 = 1$
$z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
$z_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$F(z) = \frac{\exp\{zt\}z}{(z-1)(z-z_2)(z-z_3)},$$

kde $(z - z_2)(z - z_3) = z^2 + z + 1$

$$\mathrm{res}_1 = \frac{1\mathrm{e}^t}{3} = \frac{\mathrm{e}^t}{3}$$

$$\mathrm{res}_{z_2} = \frac{\exp\{z_2 t\}}{(z_2 - 1)(z_2 - z_3)}$$

$$\mathrm{res}_{z_3} = \frac{\exp\{z_3 t\}}{(z_3 - 1)(z_3 - z_2)}$$

$z_2 = \overline{z_3}$

$$\mathrm{res}_{z_2} + \mathrm{res}_{z_3} = 2\mathrm{Re}\left\{\frac{\mathrm{e}^{-t/2}(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + i\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t)(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})}{(-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})i\sqrt{3}}\right\}$$

Věta 7.5: **[Prostota L.t.]** Věta 7.5

(1) Nechť $f(t) \in L^1_+$. Jestliže $\exists c^* \in \mathbb{R}$ tak, že $F(p) = 0$ pro všechna $p \in \mathbb{C}$, splňující $\mathrm{Re}\, p > c^*$, je $f(t) = 0$ skoro všude.

(2) Nechť $f(t),\ g(t) \in L^1_+$. Jestliže $\exists c^* \in \mathbb{R}$ tak, že $F(p) = G(p)$ pro všechna $p \in \mathbb{C}$, splňující $\mathrm{Re}\, p > c^*$, je $f(t) = g(t)$ skoro všude.

Důkaz věty 7.5:

(1):

$$F(p) = \left[\widehat{\underbrace{f(x)\chi_{0,+\infty}\exp\{-\mathrm{Re}\ px\}}_{h(x)}}\right]\left(\frac{\mathrm{Im}\ p}{2\pi}\right)$$

zvolme $c > \max\{c*, c_f\}$; polož $p = c + 2\pi i\xi$, $\xi \in \mathbb{R} \Rightarrow h(x) \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{h}(\xi) = 0$ v R
V.6.12: $h(x) = 0$ s.v. v $\mathbb{R} \Rightarrow f(x) = 0$ s.v. v $\mathbb{R}$

(2) plyne z (1) a z linearity $\mathcal{L}$: $\mathcal{L}\{f \pm g\} = \mathcal{L}\{f\} \pm \mathcal{L}\{g\}$

□

Věta 7.6: **[Inverze L.t.]** Nechť $F(p) \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\backslash\{z_1, \ldots, z_n\})$, nechť $|F(p)| \leq K|p|^{-2}$ pro $|p| > R$. Potom existuje $f(t) \in L^1_+$ tak, že $\mathcal{L}\{f(t)\}[p] = F(p)$. Dále platí vzorce Věta 7.6

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(z)e^{tz}\,dz \tag{7.1}$$

$$f(t) = \sum_k \mathrm{res}_{z=z_k} F(z)e^{tz} \tag{7.2}$$

Důkaz věty 7.6: (oslabený). Za předpokladu existence $f(t)$ dokážeme platnost vzorců (7.1) a (7.2). Tj.

$$F(p) = F(\mathrm{Re}\ p + i\mathrm{Im}\ p) = \left[\widehat{\underbrace{\exp\{-\mathrm{Re}\ pxf(x)\chi_{(0,+\infty}\}}_{h(x)}}\left(\frac{\mathrm{Im}\ p}{2\pi}\right)\right]$$

$\hat{h}(\xi) = F(\text{Re } p + i\text{Im } p)$
fixuji Re $p = a$, kde $a > \max\{\text{Re } z_1, \dots, \text{Re } z_n, c_f\}$
pozoruji: $h(x) \in L^1(\mathbb{R}) \dots \text{Re } p \geq a > c_f$
$\hat{h}(\xi) \in L^1(\mathbb{R}) \dots |\hat{h}(\xi)| \leq \frac{K}{|\xi|^2}$ pro $\xi \to \infty$
V.6.12: inverze F.t. v L^1: $h(x) = [\hat{h}(\xi)]\check{}(x)$ pro s.v. x, tedy

$$\mathrm{e}^{-ax} f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(a + 2\pi i\xi) \cdot \exp\{2\pi i\xi\}\, d\xi \quad \big/ \text{ subst. } 2\pi\xi = s$$

pro $x > 0$:

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} F(a + is)\mathrm{e}^{ixs}\, ds$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} F(a + is) \exp\{a + is\} i\, ds = \int_{\varphi} F(z) \exp\{xz\}\, dz,$$

tj. vzorec (7.1). Pokládáme $\varphi(s) = a + is$, $s \in (-\infty, +\infty)$, $dz = ids$

(2) Položme $\Gamma = \varphi_1 \oplus \varphi_2$, kde
$\varphi_1 = a + is$, $s \in [-R, R]$,
$\varphi_2 = a + R\mathrm{e}^{is}$, $s \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$,
Residuová věta:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} F(z)\mathrm{e}^{tz}\, dz = \sum_k \text{res}_{z=z_k}\{\dots\}.$$

Vidím: $\int_{\varphi_1} \to \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}$. Dále:

$$\left| \int_{\varphi_2} \right| \leq L(\varphi_2) \cdot \sup_{z \in \langle\varphi_2\rangle} |F(z)| \cdot |\mathrm{e}^{tz}| \leq \pi R \cdot \frac{K}{R^2} \cdot \mathrm{e}^{t\alpha} \to 0 \text{ pro } R \to a$$

Majoranta:

$$|\mathrm{e}^{tz}| = \exp\{\text{Re } [t \cdot (a + R \cdot \mathrm{e}^{it})]\} = \exp\{ta + \overbrace{R\cos t}^{\geq 0}\}$$

$\square$

Kapitola 8

Doplňky

Pojmy v kapitole 8:

Definice 8.1: **[Lebesgueovy prostory.]** Jsou určeny normou Definice

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$$
$$\|f\|_\infty = \inf\{c > 0 : \ |f(x)| \leq c \text{ s.v. v } \Omega\}$$

Lemma 8.1: Je-li $f(x) \in L^\infty(\Omega)$, je $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ s.v. v Ω. Lemma 8.1

Důkaz lemmatu 8.1: Označme

$$M = \{x \in \Omega : |f(x)| > \|f\|_\infty\}$$
$$M_n = \left\{ x \in \Omega : |f(x)| > \|f\|_\infty + \frac{1}{n} \right\}$$

Tvrdím: $\lambda(M_n) = 0$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$
$\|f\|_\infty + \frac{1}{n} > \|f\|_\infty$ . . . 2. vlastnost infima

Tedy $\exists c < \|f\|_\infty + \dfrac{1}{n}; \quad |f(x)| \leq c$ s.v. $\Rightarrow$

$|f(x)| \leq \|f\|_n + \dfrac{1}{n}$ s.v. $\Rightarrow \lambda(M_n) = 0,$ tedy $\lambda(M) = 0$

(spočetné sjednocení nulových množin)

pozorování: $M = \cup_{n=1}^\infty M_n$

" $\supset$ " zjevné

" $\supset$ " $x \in M \ldots |f(x)| > \|f\|_\infty \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x)| > \|f\|_\infty + \dfrac{1}{n}$ pro n dost velké $\Rightarrow x \in M_n$

$\square$

Poznámka 8.1:

$$\|f\|_\infty' = \inf\{c > 0 : \ |f(x)| \leq c \text{ až na konečně bodů}\}$$

- není obecně pravda, že $|f(x)| \leq \|f\|_\infty'$ až na konečně bodů

Věta 8.1: Prostor $L^\infty(\Omega)$ je úplný. Věta 8.1

Důkaz věty 8.1: Posloupnost $\{f_n\} \subset L^\infty$ je cauchyovská, tj.

$$(\forall \varepsilon > 0) \ (\exists n_0 \in \mathbb{N}) \ [m, n \geq n_0 \Rightarrow \|f_m - f_n\|_\infty < \varepsilon]$$

Cíl: $\exists f \in L^\infty$ tak, že $f_n \to f$ v L^∞.
Označ

$$M_{m,n} = \{x \in \Omega : \ |f_m(x) - f_n(x)| > \|f_m - f_n\|_\infty\}$$

L.8.1: $\lambda(M_{m,n}) = 0$, a tedy $\lambda(M) = 0$, kde $M = \cup_{m,n=1}^\infty$
tedy pro $x \in \Omega \setminus M$: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})[m, n \geq n_0 \Rightarrow |f_n - f_m| < \varepsilon]$
tedy pro $x \in \Omega \setminus M$: pevné je $\{f_n(x)\}_n$ cauchyovská v $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ úplný $\Rightarrow$ má limitu, označme ji $f(x)$, tedy $f_n(x) \to f(x)$ v $\Omega \setminus M$, tedy s.v.
Nechť máme $\varepsilon > 0$ dáno: pak $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ pro $x \in \Omega \setminus M$ pro $\forall m, n \geq n_0$
n fixuji, $m \to \infty$: $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ s.v. $\Rightarrow \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$

□

Poznámka 8.2: Pro $a_n \in \mathbb{R}$ definujeme

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left[\inf_{k\geq n} a_k\right].$$

Alternativně: nejmenší hromadný bod posloupnosti a_n.

Poznámka 8.3:

$$f_n(x) \to f(x) \text{ s.v. v } \Omega \not\Rightarrow \int_\Omega f_n \to \int_\Omega f$$

Lemma 8.2: **[Fatouovo lemma.]** Nechť $h_n(x) : \Omega \to \mathbb{R}$ jsou nezáporné, měřitelné. Potom Lemma 8.2

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\, dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)\, dx$$

Důkaz lemmatu 8.2: Označ $h_n(x) = \inf\{f_k(x)\}$, tedy $h_n \geq 0$, $h_n \leq h_{n+1}$

$$\text{Levi: } \int_\Omega h_n \to \int_\Omega \lim_{n\to\infty} h_n = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} \inf f_n$$

$$h_n \leq f_n \text{ pro } \forall k \geq n$$

$$\int_\Omega h_n \leq \int_\Omega f_n \text{ pro } \forall k \geq n \quad / \inf$$

$$\int_\Omega h_n \leq \inf_{k\geq n} \int_\Omega f_n \quad /n \to \infty$$

$$\int_\Omega \lim_{n\to\infty} \inf f_n \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int_\Omega f_m$$

□

Důsledky. Nechť $h_n(x) : \Omega \to \mathbb{R}$ jsou nezáporné, měřitelné a $h_n(x) \to h(x)$ s.v. v Ω. Potom
• $\int_\Omega h(x)\,dx \le \sup_n \int_\Omega h_n(x)\,dx$
• $\int_\Omega h(x)\,dx \le \lim_{n\to\infty} \int_\Omega h_n(x)\,dx$, pokud limita vpravo existuje.

Lemma 8.3: Nechť posloupnost funkcí $f_n(x)$ je cauchyovská v $L^1(\Omega)$. Potom existuje podposloupnost $f_{n_k}(x)$ a funkce $f(x)$ tak, že $f_{n_k}(x) \to f(x)$ s.v. v Ω. Lemma 8.3

Důkaz lemmatu 8.3: Posloupnost $\{f_n\}$ je cauchyovská v L^1:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})[m, n \ge n_0 \Rightarrow \|f_n(x) - f_m(x)\|_1 < \varepsilon]$$

Trik: pro $\varepsilon = 2^{-k}$ mám n_k tak, že $m, n \ge n_k \Rightarrow \int_\Omega |f_n(x) - f_m(x)|\,dx < 2^{-k}$
BÚNO: $n_{k+1} \ge n_k$, spec. $|f_{k+1}(x) - f_k(x)|\,dx < 2^{-k}$
Definuji řadu

$$(*) \quad f_{n_1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (f_{n_{k+1}} - f_{n_k});$$

N-tý částečný součet: $S_n(x) = f_{n_{N+1}}(x)$ (teleskopický efekt)
Dokážu, že $(*)$ konverguje absolutn2 s.v. v Ω
(Tím jsem hotov: KAbs $\Rightarrow$ K $\Rightarrow$ $S_N(x)$ má limitu s.v., značíme ji $f(x)$)
$(*)$ KAbs s.v. $\Leftrightarrow |f_{n_1}(x)| + \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| = h(x) < +\infty$ s.v.

$$\begin{aligned}
\int_\Omega h(x) = \int_\Omega |f_{n_1}(x)| + \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \\
\overset{\text{Levi pro řady}}{=} \|f_{n_1}\|_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\int_\Omega |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|}_{<2^{-k}} \\
\le \|f_{n_1}\|_1 + 1 < +\infty
\end{aligned}$$

$h(x) \in L^1(\Omega)$, tedy $h(x) < \infty$ s.v.

□

Lemma 8.4: **[O vnoření.]** **Lemma 8.4.** [O vnoření.] Nechť $|\Omega| < \infty$, nechť $1 \le q < p \le \infty$. Potom $L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ a platí Lemma 8.4

$$\|f\|_q \le c\,\|f\|_p\,, \qquad c = |\Omega|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}}\,.$$

Důkaz lemmatu 8.4:
• $p = +\infty \ldots$ d.cv.

• $p < +\infty$; Hölderova nerovnost:

$$\int_\Omega |u(x)v(x)| \le \left(\int_\Omega |u|^r\right)^{1/r} + \left(\int_\Omega |v|^s\right)^{1/s}$$

$r, s \in (1, +\infty)$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$

$$\|f\|_q^q = \int_\Omega |f|^q \cdot 1 \leq \left(\int_\Omega |f|^p\right)^{q/p} + \left(\int_\Omega 1^0\right)^{\frac{p-q}{p}} = \|f\|_p^q |\Omega|^{\frac{p-q}{p}}$$

Hölder: $u = |f|^q$, $r = \frac{p}{q}$, $v = 1$, $s = \frac{p}{p-q}$

$$\|f\|_q \leq \|f\|_p |\Omega|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}}, \quad \text{spec.: } f \in \mathcal{L}^p \Rightarrow f \in L^q$$

$\square$

Poznámka 8.4:
- předpoklad $|\Omega| < \infty$ je podstatný: $f(x) = \frac{1}{1+x} \in L^2(0, +\infty) \setminus L^1(0, \infty)$.
- opačné vnoření $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ ($q < p$) neplatí nikdy.

Věta 8.2: Prostor $L^p(\Omega)$, $p \in [1, \infty)$, je úplný. Věta 8.2

Důkaz věty 8.2: 1. krok:
- $\lambda(\Omega) < \infty$; cíl: posloupnost $\{f_n\}$ cauchyovská v $L^p(\Omega) \Rightarrow \exists f \in L^p(\Omega)$ a $f_n \to f$ v $L^p(\Omega)$

L.8.4: $\|f_n - f_m\|_1 \leq c\|f_n - f_m\|_p$
tedy f_n je cauchyovská v $L^1(\Omega)$
L.8.3: $\exists f(x)$ tak, že $f_{n_k}(x) \to f(x)$ s.v. v Ω
f_n cauchyovská v $L^p(\Omega)$: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})[m, n \geq n_0 \Rightarrow \|f_n - f_m\|_p < \varepsilon]$
Nechť $\varepsilon > 0$ dáno, pak $\exists n_0 \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq n_0$, $\forall k \geq n_0$ $(\Rightarrow n_k \geq k \geq n_0)$:

$$\int_\Omega \underbrace{|f_n(x) - f_{n_k}(x)|}_{h_k(x)} < \varepsilon^p$$

n fixuji, $k \to \infty$: $f_{n_k} \to f$ s.v.; $h_k(x) \to |f_n(x) - f(x)|^p$ s.v.
důsledek L.8.2:

$$\int_\Omega |f_n(x) - f(x)|^p \, dx \leq \varepsilon^p, \qquad \|f_n - f\|_p < \varepsilon$$

Zdalipak $f \in L^p(\Omega) \Leftrightarrow \|f\|_p < +\infty$

$$\|f\|_p = \|f_n + f - f_n\| \overset{\text{Minkovski}}{\leq} \underbrace{\|f_n\|_p}_{<\infty} + \underbrace{\|f - f_n\|_p}_{<1 \text{ pro } n \text{ velké}} < +\infty$$

- $\lambda(\Omega) = +\infty$, lze psát $\Omega = \cup_{j=1}^{\infty}$, kde $\lambda(\Omega_j) < \infty$ a $\Omega_j \subset \Omega_{j+1}$

například $\Omega_j = \Omega \cap B(0, j)$, $B(0, j)$ je koule o poloměru j
stačí vybrat f_{n_k} tak, že $f_{n_k}(x) \to f(x)$ s.v. v Ω
Diagonální výběr:
1. krok" f_n je cauchyovská v $L^p(\Omega_1) \ldots \lambda(\Omega_1) < +\infty \Rightarrow f_n$ je cauchyovská v $L^1(\Omega_1)$
výběrem (vynecháním některých f_n) $\ldots f_n(x) \to f(x)$ s.v. v Ω_1
2. krok: f_n je cauchyovská v $L^1(\Omega_2)$ $\ldots$ udělám výběr, ale první funkci nechám; $f_n(x) \to f(x)$ s.v. v Ω_2
k. krok: výběrem konergence s.v. v Ω_k nechávám prvních k funkcí

$\square$

Definice 8.2: **[Diracova funkce.]** Symbolem $\delta_y(x)$ značíme funkci takovou, že Definice

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\delta_y(x)\,dx = f(y)$$

pro libovolnou funkci $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Chápeme-li $\int$ jako Lebesgueův (Newtonův, Riemannův) integrál, pak taková funkce neexistuje! Následující výpočty však vedou k zajímavým (a někdy i správným) závěrům.

Definice 8.3: **[Dirac a konvoluce.]** Platí Definice

$$[\delta_z * f](x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\delta_z(y)\,dy = f(x-z)$$

Tedy konvoluce s δ_z způsobí posun argumentu o z. Speciálně, δ_0 je vůči operaci konvoluce jednotkový prvek.

Definice 8.4: **[Dirac a Fourierova transformace.]** Platí Definice

$$\hat{\delta}_a(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-2\pi i\xi x)\delta_a(x)\,dx = \exp(-2\pi i\xi a)$$
$$\check{\delta}_a(x) = \exp(2\pi i a x)$$

Speciálně: $\hat{\delta}_0 = 1$, $\hat{1} = \delta_0$ (neboť $\check{\delta}_0 = 1$). Srovnejte s principem neurčitosti: čím menší nosič f, tím větší nosič $\hat{f}$.

Dále: značíme-li $\langle\cdot,\cdot\rangle$ skalární součin v $L^2(\mathbb{R})$, je

$$\hat{f}(\xi) = \langle f(x), \exp(2\pi i\xi x)\rangle\,.$$

Tedy zhruba řečeno, $\hat{f}(\xi)$ je velké, pokud v průběhu $f(x)$ dominuje chování o frekvenci ξ. Extrémním vyjádřením tohoto principu je vztah

$$[\exp\widehat{(2\pi i a x)}] = \delta_a$$

tj. čistá vlna o frekvenci a se transformuje v Diracovu funkci v bodě a.

K Větě 6.3. Pomocí předchozího a Věty 6.8.

$$[f\widehat{(x-z)}](\xi) = [\widehat{f * \delta_z}](\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{\delta}_z(\xi) = \hat{f}(\xi)\exp(-2\pi i z\xi)$$

Rovnost je správná, pouze důkaz je “nekorektní” - situace v matematice ne až tak neobvyklá.

Definice 8.5: **[Dirac a Fourierova řada.]** Funkci δ_0 rozšíříme 2π-periodicky - takže Diraci sedí v každém bodě $2k\pi$. Je to sudá funkce, tedy $b_k = 0$ a Definice

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \delta_0(x)\cos(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}$$

Hledaný rozvoj lze zapsat jako

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{2k\pi}(x) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\cos(kx)$$

Definice 8.6: **[Víceznačné komplexní funkce.]** Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$. Přiřazení $\Phi : z \to M(z)$, kde $M(z) \subset \mathbb{C}$, se nazývá víceznačná funkce v Ω. Definice

Funkce $f(z) : \Omega \to \mathbb{C}$ se nazývá spojitá větev víceznačné funkce Φ, pokud (1) $f(z)$ je spojitá a (2) $f(z) \in M(z)$ pro $\forall z \in \Omega$.

Příklad 8.1: Příklad

• Dříve definované funkce

$$\begin{aligned} \log\, &: z \to \big\{\zeta \in \mathbb{C} : \ \exp\zeta = z\big\} \\ \arg\, &: z \to \big\{\beta \in \mathbb{R} : \ z = |z|\exp(\beta i)\big\} \end{aligned}$$

jsou příklady víceznačných funkcí v $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

• Názorně: argument arg měří úhel, který nenulové komplexní číslo svírá s kladnou reálnou polosou. Úhel není jednoznačný, je určen až na násobek 2π.

• V množině $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : \ x \leq 0\}$ je definována tzv. hlavní hodnota argumentu Arg tak, že volím tu (jednoznačně určenou) hodnotu argumentu, která leží v intervalu $(-\pi, \pi)$.

• Funkce Arg je spojitou větví arg v množině Ω. Naproti tomu neexistuje spojitá větev arg v celém $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Sporem: nechť $a(z)$ je taková větev. Potom $a(1) = 2k\pi$ pro vhodné k. Jaká je nyní hodnota $a(-1)$? Postupujme z 1 do -1 po jednotkové kružnici proti směru hodinových ručiček. Protože $a(z)$ se spojitě zvětšuje, nutně $a(-1) = 2k\pi + \pi$. Postupujme nyní z 1 do -1 proti směru hodinových ručiček - úhel se spojitě zmenšuje, tedy $a(-1) = 2k\pi - \pi$, což je spor.

• Podobně: hlavní hodnota logaritmu Log je příkladem spojité větve log v Ω. Podle Věty 5.1. zde platí

$$\mathrm{Log}'(z) = \frac{1}{\exp'(\mathrm{Log}\, z)} = \frac{1}{\exp(\mathrm{Log}\, z)} = \frac{1}{z}$$

- srovnejte s derivací $\ln x$ v $\mathbb{R}$. Opět nelze nalézt spojitou větev log v celém $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Taková funkce by zde totiž byla primitivní funkcí k $1/z$, a tudíž integrál po každé uzavřené křivce v $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ by byl nula. To však odporuje vzorci

$$\int_\varphi \frac{dz}{z} = 2\pi i\,,$$

kde φ je jednotková kružnice.

Index