Matematika pro fyziky I

ZS 2003 / 2004

Přednášející: RNDr. Dalibor Pražák, PhD.

12. ledna 2004

Obsah

Kapitola 1

Extrémy funkcí více proměnných

POJMY V TÉTO KAPITOLE: Globální extrém, (ostrý) lokální extrém, pozitivně/negativně (semi)definitní forma, indefinitní forma. Nutná podmínka na extrém uvnitř M, postačující podmínka lokálního extrému, Lagrangeovy multiplikátory - jedna vazba, Lagrangeovy multiplikátory - více vazeb.

Poznámka 1.1 Během celé kapitoly předpokládáme:

$$F(x): \; M \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Definice 1.1 (<u>EXTRÉMY.</u>) Funkce $F(x)$ má v $a \in M$ vůči M:

1. <u>GLOBÁLNÍ MAXIMUM</u>:
$$(\forall x \in M)\,(F(x) \leq F(a))$$

2. <u>LOKÁLNÍ MAXIMUM</u>:
$$(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in \mathcal{P}\,(a, \delta) \cap M)\,(F(x) \leq F(a))$$

3. <u>OSTRÉ LOKÁLNÍ MAXIMUM</u>:
$$(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in \mathcal{P}\,(a, \delta) \cap M)\,(F(x) < F(a))$$

Analogicky pro minimum.

Věta 1.1 Nechť $M \in \mathbb{R}^n$ je omezená a uzavřená, $F(x): M \to \mathbb{R}$ je spojitá. Pak $F(x)$ má v M globální maximum <u>i</u> minimum.

Důkaz věty 1.1 M je omezená a uzavřená $\Rightarrow$ kompakt. Spojitá funkce na kompaktu má maximum i minimum.

$\square$

Věta 1.2 (Nutná podmínka na extrém uvnitř M.) Nechť $a \in \text{int}\, M$, nechť $F(x)$ má v a (lokální extrém) vůči M. Potom existuje-li $\nabla F(a)$, je nutně $\nabla F(a) = 0$.

Důkaz věty 1.2 Existuje-li $\frac{\partial F}{\partial v}(a)$, je roven nule. BÚNO lokální maximum.

$\exists \delta > 0 : \mathcal{U}(a, \delta) \subset M$

$F(x) \leq F(a)\ \forall x \in \mathcal{U}(a, \delta)$

Definujme funkci $\varphi(t) = F(a + tv); t \in (-\delta; \delta)$. $\varphi(0)$ je maximum $\varphi(t)$ vůči $(-\delta; \delta)$ $\Rightarrow \varphi'(0) = 0 = \frac{\partial F}{\partial v}(a)$, pokud existuje.

$\square$

Poznámka 1.2 Nutná podmínka extrému uvnitř:

- buď $\nabla F(x) = 0$,
- nebo $\nabla F(x)$ neexistuje.

Příklad 1.1 `Najděte extrémy funkce` $F(x, y) := xy$ `na množině` $M = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\} = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$.

$\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right) = (y, x)$

$= \vec{0} \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0) \equiv$`A`.

`Celá hranice je podezřelá, parametrizujeme:` $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in [0; 2\pi]$

$\varphi(t) = F(\cos t; \sin t) = \sin t \cdot \cos t = \frac{1}{2} \sin 2t.$

B `je lokální maximum` F `vůči` ∂M.

$B = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $C = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $D = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $E = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

NUTNOST VĚTY 1.1 :

$F(A) = 0$

$F(B) = F(D) = \frac{1}{2}$ ... `globální maximum`

$F(C) = F(E) = -\frac{1}{2}$ ... `globální minimum`

Poznámka 1.3 Cíl: postačující podmínky na lokální extrém pomocí 2. derivací.

PRA-VĚTA: $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) \in \mathcal{C}^2(\mathcal{U}(a))$, $f'(a) = 0$, $f''(a) > 0 \Rightarrow a$ je lokální minimum.

Analogicky: $f''(a) < 0 \Rightarrow a$ je lokální maximum.

DŮKAZ PRA-VĚTY - náznak důkazu: $f(a+h) = f(a) + \underbrace{f'(a)h}_{=0} + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + o(h^2)$.

$$f(a+h)-f(a) = \underbrace{h^2}_{>0}\left(\underbrace{\frac{1}{2}f''(a)}_{\text{kladné nebo záporné}} + \underbrace{\frac{o(h^2)}{h^2}}_{\to 0}\right) > 0 \text{ pro } h \text{ malé.}$$

Poznámka 1.4 Taylor pro více proměnných: $a, h \in \mathbb{R}^n : F(x) \in \mathcal{C}^2(\mathcal{U}(a))$

$$F(a+h) = F(a) + J \cdot h + \tfrac{1}{2}h^T \cdot H \cdot h + o\left(\|h\|^2\right)$$

$$J = \nabla F(a)$$

$$H = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{i,j=1}^n$$

Poznámka 1.5 A je symetrická $\Rightarrow$

- $\exists$ právě n vlastních čísel: $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$
- $\lambda_j \in \mathbb{R}$
- $\lambda = \min\{\lambda_j\}$, $\Lambda = \max\{\lambda_j\}$. Potom $\lambda\|h\|^2 \leq \varphi(h) \leq \Lambda\|h\|^2$.

Definice 1.2 (FORMY.) $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$ symetrická matice $n \times n$. Funkce $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ daná předpisem $\varphi(h) := h^T \cdot A \cdot h = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}h_ih_j$ se nazve KVADRATICKÁ FORMA S MATICÍ A. Nechť λ_j jsou vlastní čísla A.

Matice (forma) se nazve

1. POZITIVNĚ DEFINITNÍ: $\lambda_j > 0\ \forall j$
2. NEGATIVNĚ DEFINITNÍ: $\lambda_j < 0\ \forall j$
3. INDEFINITNÍ: $\exists \lambda_j > 0\ \&\ \exists \lambda_j < 0$
4. POZITIVNĚ SEMIDEFINITNÍ: $\lambda_j \geq 0\ \forall j$
5. NEGATIVNĚ SEMIDEFINITNÍ: $\lambda_j \leq 0\ \forall j$

Věta 1.3 (POSTAČUJÍCÍ PODMÍNKA LOKÁLNÍHO EXTRÉMU.) Nechť $F(x) \in \mathcal{C}^2(\mathcal{U}(a))$, nechť $\nabla F(a) = 0$. Označme $H(a) = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{i,j=1}^n$. Potom

1. $H(a)$ je positivně definitní $\Rightarrow$ $F(x)$ má v a ostré lokální minimum vůči $\mathcal{U}(a)$.
2. $H(a)$ je negativně definitní $\Rightarrow$ $F(x)$ má v a ostré lokální maximum vůči $\mathcal{U}(a)$.
3. $H(a)$ je indefinitní $\Rightarrow$ $F(x)$ nemá v a (ani lokální) extrém.

Důkaz věty 1.3 $\varphi(h)$ je forma k matici $H(a)$.

Taylor: $F(a+h) - F(a) = \frac{1}{2}\varphi(h) + o\left(\|h\|^2\right)$

<u>ad 1:</u> $\lambda = \min\{\lambda_j\} > 0$: $\varphi(h) \geq \lambda\|h\|^2$

$F(a+h) - F(a) \geq \|h\|^2 \left[\frac{1}{2}\lambda + \frac{o(\|h\|^2)}{\|h\|^2}\right]$

$\exists\delta > 0$: $\left[\frac{1}{2}\lambda + \frac{o(\|h\|^2)}{\|h\|^2}\right] > \frac{\lambda}{4}$ pro $h \in \mathcal{P}(0, \delta)$

> 0 pro $h \in \mathcal{P}(0, \delta)$ ... ostré lokální minimum.

<u>ad 2:</u> pomocí 1):

označme $G = -F$: $\nabla^2 F(a)$ je negativně definitní $\Rightarrow$ $\nabla^2 G(a)$ je pozitivně definitní.

Dle 1): $\Rightarrow$ $F(a)$ je ostré lokální minimum.

$\Rightarrow$ $G(a)$ je ostré lokální maximum.

<u>ad 3:</u> $\lambda_1 > 0$: v ... vlastní vektor

$\psi(t) = F(a + tv)$

$\psi(0) = F(a)$

$\psi'(0) = \nabla F(a) \cdot v = 0$

$\psi''(0) = v^T \cdot H(a) \cdot v = \varphi(v) = \lambda_1\|v\|^2 > 0$

Podle Pra-Věty: $F(a)$ je ostré lokální minimum vůči přímce $a + tv$.

$\lambda_2 < 0 : w$ ... vlastní vektor

$\chi(t) = F(a + tw)$

$\vdots$

$\chi''(0) = \varphi(w) = \lambda_2 \|w\|^2 < 0$

PRA-VĚTA: $F(a)$ je ostré lokální maximum vůči $a + tw$.

$\Rightarrow a$ není (vůči $\mathcal{U}(a)$) ani lokální extrém.

$\square$

Poznámka 1.6

- případ 3) se nazývá sedlový bod
- ani jeden z 1) - 3) $\Leftrightarrow \forall \lambda_i \geq 0$, $\exists \lambda_i = 0$, neboli $\forall \lambda_i \leq 0$ $\exists \lambda_i = 0$, pak nelze nic říci

Příklad 1.2 $F(x,y,z) = x^3 + y^2 + \frac{1}{2}z^2 - 3xz - 2y + 2z$ v $\mathbb{R}^3$

$\nabla F = 0$:

$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - 3z = 0 \;\; x^2 = z$

$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y - 2 = 0 \;\; y = 1$

$\frac{\partial F}{\partial z} = z - 3x + 2 = 0 \;\; x^2 - 3x + 2 = 0 \;\Rightarrow\; x = 1; 2$

Podezřelé body: $A = \Big(1,1,1\Big)$ a $B = \Big(2,1,4\Big)$.

$$\nabla^2 F = \begin{pmatrix} 6x & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pro $A = \Big(1,1,1\Big)$:

$$\nabla^2 F(A) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 6 & 0 & -3 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ -3 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \det(\lambda J - \nabla^2 F(A)) = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 7\lambda - 3)$$

vlastní čísla: $\lambda_1 = 2 > 0$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}(7 + \sqrt{61}) > 0$, $\lambda_3 = \frac{1}{2}(7 - \sqrt{61}) < 0 \Rightarrow A$ je sedlový bod.

`Pro` $B = \Big(2, 1, 4\Big)$:

$$\nabla^2 F(B) = \begin{pmatrix} 12 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 12 & 0 & -3 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ -3 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \det(\lambda J - \nabla^2 F(A)) = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 7\lambda - 3)$$

`vlastní čísla:` $\lambda_1 = 2 > 0$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}(13 + \sqrt{157}) > 0$, $\lambda_3 = \frac{1}{2}(13 - \sqrt{157}) > 0 \ldots$ `pozitivně definitní` $\Rightarrow$ `B lokální minimum.`

`Globální extrémy?`

$\varphi(t) = F(t, 0, 0) = t^3 \ \ldots$ `neomezená shora i zdola` $\Rightarrow B$ `není globální extrém.`

Věta 1.4 Nechť $F(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je spojitá a $\lim_{\|x\| \to x_0} F(x) = +\infty$. Pak existuje globální minimum v $\mathbb{R}^n$.

Důkaz věty 1.4 Označme $A := F(0)$, předpoklady $(\exists R > 0)$ $(\|x\| > R \Rightarrow F(x) > A+1)$. Dále označme $M := \{x : \|x\| \leq R\}$. Kompakt: $\exists a \in M$ minimum $F(x)$ vůči M.

Víme, že a je globální minimum vůči $(\mathbb{R}^n) : F(a) \leq F(0) = A$. Potom $\forall\ x \in \mathbb{R}^n \setminus M :$ $F(x) > A + 1$.

<u>Zrcadlová verze:</u> $F(x) \to -\infty \Rightarrow \exists$ globální maximum.

□

<u>LAGRANGEOVY MULTIPLIKÁTORY λ</u> - hledání extrému vůči množinám menší dimenze.

Věta 1.5 (<u>MULTIPLIKÁTORY λ - JEDNA VAZBA.</u>) Nechť $F(x), G(x) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$, nechť $F(x), G(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Nechť $\underline{\underline{\Gamma := \{x \in \mathbb{R}^n : G(x) = 0\}}}$. Nechť $\underline{\underline{\nabla G(x) \neq 0\ \forall x \in \Gamma}}$. Potom má-li $F(x)$ v bodě $a \in \Gamma$ lokální extrém vůči Γ, pak $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ takové, že

(1) $\nabla F(a) = \lambda \nabla G(a)$

(1') $G(a) = 0$.

Důkaz věty 1.5 Náznak důkazu: ...

Typicky: Γ je křivka, $\vec{t}$ je tečna v a, $\vec{n}$ je normála v a. V $\mathbb{R}^2$: a je vůči Γ extrém.

$$\left.\begin{array}{l} 0 = \frac{\partial F}{\partial t}(a) = \nabla F(a) \cdot t \\ G \equiv 0 \text{ na } \Gamma \\ 0 = \frac{\partial G}{\partial t}(a) = \nabla G(a) \cdot t \end{array}\right\} \quad \exists \lambda \in \mathbb{R} : \nabla F(a) = \lambda \nabla G(a). \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nabla G(a) \ldots \text{ směr normály k } \Gamma\ \forall n \text{ (dimenze)}.$$

□

Poznámka 1.7

- (1), (1'): $(n+1)$ rovnic o $(n+1)$ neznámých $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \lambda)$
- množina $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ má dimenzi $(n-1)$; $\nabla G \neq 0 \Rightarrow$ nedegeneruje
- (1), (1') speciálně: zahrnuje $a \in \Gamma$, $\nabla F(a) = 0$. $(\lambda = 0)$

Příklad 1.3 $F(x,y) = x^2 y$, na $\Gamma = \{x^2 + y^2 = 1\}$.

$G(x,y) = x^2 + y^2 - 1$.

$\nabla G = (2x, 2y) \neq 0$ na Γ.

$\nabla F = (2xy, x^2)$

$$2xy = \lambda 2x \ / \ \cdot x$$
$$x^2 = \lambda 2y \ / \ \cdot y$$

$$2x^2 y + x^2 y = 2\lambda \underbrace{x^2 + y^2}_{=1}$$
$$3x^2 y = \lambda 2\lambda$$

$$x^2 = 3x^2 y^2$$

Diskuse:

1. $x = 0:\ \lambda = 0, y = \pm 1$
2. $x \neq 0:\ 1 = 3y^2:\ y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\ \ x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$

   $\Gamma = G^{-1}(\{0\}) \Rightarrow$ uzavřenost a spojitý vzor $\Rightarrow$ je také uzavřené, je omezené $\Rightarrow$ je to kompakt.

   Dle Věty 1.1 extrémy existují $\rightarrow$ musí to být některý z nich.

Věta 1.6 (Multiplikátory λ - více vazeb.) Nechť $F(x)$ a $G_1(x), G_2(x), \ldots, G_s(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ $(s < n)$ jsou $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$. Označme $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n :\ G_1(x) = 0,\ G_2(x) = 0,\ \ldots, G_s(x) = 0\}$. Nechť matice $\left(\frac{\partial G_i}{\partial x_j}\right)$má pro každé $x \in \Gamma$ maximální hodnost, tj. s. Potom: má-li $F(x)$ v bodě $a \in \Gamma$ lokální extrém vůči Γ, existují $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s \in \mathbb{R}$ taková, že

$$\begin{aligned} \nabla F(a) &= \lambda_1 \nabla G_1(a) + \lambda_2 \nabla G_2(a) + \dots + \lambda_s \nabla G_s(a) \\ G_1(a) &= 0 \\ G_2(a) &= 0 \\ &\vdots \\ G_s(a) &= 0 \end{aligned}$$

Důkaz věty 1.6 Neděláme!!!

□

Poznámka 1.8

- + ROHY HRANICE JSOU VŽDY PODEZŘELÉ!!!
- jde o $(n+s)$ rovnic s $(n+s)$ neznámými $(a_1, a_2, \dots, a_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$
- Γ je útvar dimenze $(n-s)$: zaručeno hodností matice $\left(\frac{\partial G_i}{\partial x_j}\right)$

Příklad 1.4

$$\begin{aligned} F(x,y,z) &= x+y+z \\ G_1(x,y,z) &= x^2+y^2+z^2-1 = 0 \\ G_2(x,y,z) &= x+2y-2z = 0 \end{aligned}$$

- všechny jsou v $\mathcal{C}^1$
- ověření hodnosti

$$\frac{\partial G_i}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$\Gamma = \{G_1 = 0\} \cap \{G_2 = 0\}$

$$\left.\begin{aligned} \Delta_1 = 4x - 2y = 0 &: \quad x = \tfrac{y}{2} \\ \Delta_2 = -4y - 4z = 0 &: \quad z = -y \end{aligned}\right] \Rightarrow \quad h = 2$$

$G_2 = 0$:

(a) $\frac{1}{2}y + 2y + 2y = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 0$, $z = 0$ ... spor s $G_1 = 0$.

$$\underline{\underline{\nabla F = (1,1,1)}} : \quad \begin{aligned} 1 &= \lambda 2x + \mu \;\; / \cdot x \quad x^2+y^2+z^2 = 1 \\ 1 &= \lambda 2y + 2\mu \;\; / \cdot y \quad x+2y-2z = 0 \\ 1 &= \lambda 2z - 2\mu \;\; / \cdot z \end{aligned}$$

$$x+z+y = 2\lambda(x^2+y^2+z^2) + \mu(x+2y-2z) \quad \begin{aligned} &x+y+z = 2\lambda \\ &1 = \mu + 4\mu + 4\mu \;\Rightarrow\; \underline{\underline{\mu = \tfrac{1}{9}}} \\ &3 = 4\lambda^2 + \mu \;\Rightarrow\; \lambda^2 = \tfrac{2}{9} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{\lambda = \pm\tfrac{\sqrt{2}}{3}}} \end{aligned}$$

$\underline{\underline{x = \frac{1-\mu}{2\lambda}}}$, $\underline{\underline{y = \frac{1-2\mu}{2\lambda}}}$, $\underline{\underline{z = \frac{1+2\mu}{2\lambda}}}$

Příklad 1.5 $\underline{F(x,y) = x^2 + y \text{ na } \begin{matrix} x^2 + y^4 \leq 1 \\ x - 2y \leq 0 \end{matrix}}$

extrémy uvnitř: $\nabla F(2x, 1) \neq 0$ - žádné podezřelé body

na hranici <u>vůči Γ_1 :</u> $G_1 = x - 2y,\ \nabla G_1 = (1, -2)$.

$$\begin{aligned} &2x = \lambda \\ &1 = -2\lambda \\ &x - 2y = 0 \end{aligned}$$

$\lambda = -\frac{1}{2}$ $x = -\frac{1}{4}$ $y = -\frac{1}{8}$, ještě ověřit $\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1}{8}\right)^4 < 1$ ... platí

$F(A) = -\frac{1}{16}$

<u>vůči Γ_2:</u> $\nabla G = (2x, 4y^3)$

$$\begin{aligned} &2x = \lambda 2x \\ &1 = \lambda 4y^3 \\ &x^2 + y^4 = 1 \end{aligned}$$

1. $x = 0:\ y = \pm 1$, B=$[0,1] \in M$, F(B) = 1.
2. $x \neq 0:\ \lambda = 1\ \ y = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$, $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

   C$[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{\sqrt[3]{4}}]$; F(C) $\doteq 1,4$

   E, F $[\mp 2\sqrt{\sqrt{5}-2}, \mp\sqrt{\sqrt{5}-2}]$

$$\begin{aligned} &z = y^2 \\ &y^4 + 4y^2 - 1 = 0 \\ &x = 2y \end{aligned}$$

F je globální maximum, A je globální minimum.

Poznámka 1.9 Body podezřelé z extrémů:

- uvnitř: $\nabla = 0$
- na hranici: multiplikátory
- zlomy, hranice: vždy

Kapitola 2

Věty o inverzní a implicitní funkci

Pojmy v této kapitole: Implicitní funkce 1-dim, implicitní funkce - obecná verze, věta o inverzní funkci.

Poznámka 2.1 Během celé kapitoly předpokládáme:

$\Omega \in \mathbb{R}^n$ otevřená, $F(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Značení: $F(x) \in \mathcal{C}(\Omega)$ ... spojitá

$F(x) \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ ... spojitá a $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ spojitá, též spojitě diferencovatelná, hladká

$F(x) \in \mathcal{C}^k(\Omega)$ ... všechny derivace až do řádu k včetně jsou spojité

$\mathcal{C}^k$, $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ ... všechny derivace všech řádů spojité

Lemma 2.1 Nechť $F(x) : \Omega \to \mathbb{R}$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$je otevřená. Potom

1. jsou-li $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ omezené v Ω, je F spojitá v Ω.
2. jsou-li $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ spojité v Ω, navíc Ω je konvexní, a, $b \in \Omega$, pak existuje c na spojnici a, b tak, že $F(b) - F(a) = \nabla F(c) \cdot (b - a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(c) \cdot (b_i - a_i)$

Důkaz lemmatu 2.1

1. $\left|\frac{\partial F}{\partial x_i}(x)\right| \leq K \; \forall x \in \Omega$: $a \in \Omega$, b je blízko a.

   Značení: $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$

   $a^0 = a$,

   $a^1 = (b_1, a_2, \ldots, a_n)$,

$a^2 = (b_1, b_2, a_3, \ldots, a_n)$,

$\vdots$

$a^n = b$.

Tedy

$$F(b) - F(a) = F(a^n) - F(a^0) = \sum_{i=1}^{n} F(a^i) - F(a^{i-1}) \ (*)$$

Víme: $a^i - a^{i-1} = (0, \ldots, 0, \underbrace{b_i - a_i}_{i\text{-té místo}}, 0, \ldots 0)$

$$(*) \ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(\eta_i)(b_i - a_i); \quad \eta_i \in \langle a^i; a^{i-1} \rangle$$

$|F(b) - F(a)| \leq \underbrace{n \cdot K}_{\text{lipschitzovská konstanta}} \cdot \|b - a\|$, neboť $|a_i - b_i| \leq \|a - b\|$

2. viz věta 6.5 minulého semestru.

$\square$

Poznámka 2.2 Poznámka k Lemmatu 2.1 : 1) ... omezenost ∇f podstatná

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ $\exists$ všude v $\mathbb{R}^2$. Přesto f nespojitá v (0,0).

Věta 2.1 (<u>Implicitní funkce 1-dim.</u>) Nechť $F(\vec{x}, y) : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ (tj. $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$.) Nechť $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$ jsou takové, že

1. $F(\vec{a}, b) = 0$
2. F je $\mathcal{C}^1$ na okolí bodu $(\vec{a}, b)$
3. $\frac{\partial F}{\partial y}(\vec{a}, b) \neq 0$.

Potom existují δ, $\Delta > 0$ taková, že pro každé $\vec{x} \in \mathcal{U}(\vec{a}, \delta)$ existuje jediné $y \in \mathcal{U}(b, \Delta)$ tak, že $F(\vec{x}, y) = 0$. Označíme-li toto $y = \varphi(\vec{x})$, je $\varphi(\vec{x}) \in C^1(\mathcal{U}(\vec{a}, \delta))$ a pro každé $\vec{x} \in \mathcal{U}(\vec{a}, \delta)$, $i = 1, \ldots, n$ platí $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\vec{x}) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x_i}(\vec{x}, \varphi(\vec{x}))}{\frac{\partial F}{\partial y}(\vec{x}, \varphi(\vec{x}))}$. Obecněji, je-li F třídy $\mathcal{C}^k$, $k \in \mathbb{N}$ na okolí bodu $(\vec{a}, b)$, je $\varphi(\vec{x}) \in \mathcal{C}^k(\mathcal{U}(\vec{a}, \delta))$.

Důkaz věty 2.1

1. $\frac{\partial F}{\partial y}(\vec{a}, b) = a > 0$ BÚNO.

   Označme $\Omega := \mathcal{U}(\vec{a}; \delta) \times \mathcal{U}(b; \Delta)$. Ze spojitosti: $\exists\, \delta, \Delta$ tak malé, že $\frac{\partial F}{\partial y} \geq \frac{a}{2} \;\Rightarrow\; F(\vec{x}, y)$ rostoucí vůči y na celé oblasti Ω.

   $F(\vec{a}; b) = 0 \;\Rightarrow\; F(\vec{a}; b + \Delta) > 0,\ F(\vec{a}; b - \Delta) < 0.$

   F spojitá: lze zmenšit δ tak, že $F(\vec{x}; b+\Delta) > 0\ \forall x \in \mathcal{U}(\vec{a}; \delta)$ a také $F(\vec{x}; b-\Delta) < 0$ $\forall x \in \mathcal{U}(\vec{a}; \delta)$.

   Z Darbouxovy věty: $x \in \mathcal{U}(\vec{a}; \delta)$ dáno $\Rightarrow\; \exists y \in \mathcal{U}(b; \Delta)$ tak, že $F(\vec{x}; y) = 0$ jediné, protože $\frac{\partial F}{\partial y} > 0$.

2. Počítejme obecněji $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(\vec{x})$. $F(\vec{x}; \varphi(\vec{x})) = 0$. $F(\vec{x} + t\vec{v}; \varphi(\vec{x} + t\vec{v})) = 0$ (t dost malé).

   $$0 = F(\vec{x} + t\vec{v}; \varphi(\vec{x} + t\vec{v})) - F(\vec{x}; \varphi(\vec{x})) = \underbrace{F(\vec{x} + t\vec{v}; \varphi(\vec{x} + t\vec{v})) - F(\vec{x} + t\vec{v}; \varphi(\vec{x}))}_{D1} +$$

   $$+ \underbrace{F(\vec{x} + t\vec{v}; \varphi(\vec{x})) - F(\vec{x}; \varphi(\vec{x}))}_{D2}$$

   D1: (Lagrange) $= \frac{\partial F}{\partial y}(\vec{x}+t\vec{v}; \eta) \cdot (\varphi(\vec{x} + t\vec{v}) - \varphi(\vec{x}))$; kde η leží mezi $\varphi(\vec{x})$ a $\varphi(\vec{x}+t\vec{v})$.

   D2: $= \nabla_x F(\xi; \varphi(\vec{x})) \cdot t\vec{v}$, kde ξ leží mezi $\vec{x}$ a $\vec{x} + t\vec{v}$.

   $$\frac{\partial F}{\partial y}(\vec{x} + t\vec{v})\,(\varphi(\vec{x} + t\vec{v}) - \varphi(\vec{x})) + \nabla_x F(\xi; \varphi(\vec{x})) \cdot t\vec{v} = 0$$

   $$\frac{\varphi(\vec{x} + t\vec{v}) - \varphi(\vec{x})}{t} = -\frac{\nabla_x F(\xi, \varphi(\vec{x})) \cdot \vec{v}}{\frac{\partial F}{\partial y}(\vec{x} + t\vec{v}; \eta)} \qquad \Big/ t \to 0,\ \Rightarrow\ \eta \to \varphi(\vec{x}), \xi \to x$$

   $$\frac{\partial \varphi(\vec{x})}{\partial v} = -\frac{\nabla_x F(\xi, \varphi(\vec{x})) \cdot \vec{v}}{\frac{\partial F}{\partial y}(\vec{x}; \varphi(\vec{x}))} = -\frac{\frac{\partial F(\xi, \varphi(\vec{x}))}{\partial v}}{\frac{\partial F}{\partial y}(\vec{x}; \varphi(\vec{x}))}$$

   speciálně

   $$\frac{\partial \varphi(\vec{x})}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(\vec{x}, \varphi(\vec{x}))}{\frac{\partial F}{\partial y}(\vec{x}, \varphi(\vec{x}))}\ (1), \qquad i = 1, \dots, m$$

3. $\left|\frac{\partial F}{\partial x_i}\right| \leq K$ na Ω (ze spojitosti)

   $\left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| \leq \frac{a}{2} \quad (1) \Rightarrow \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right| \leq \frac{K}{\frac{a}{2}} \leq \frac{2K}{a}$ pro $x \in \mathcal{U}(a; \delta)$

   Lemma 2.1, 1): $\Rightarrow \varphi(x) \in \mathcal{C}\Big(\mathcal{U}(a; \delta)\Big)$

   znovu užiji (1): pravá strana (1) je spojitá $\Rightarrow \varphi(x) \in \mathcal{C}^1\Big(\mathcal{U}(a; \delta)\Big)$

   vyšší derivace: $F \in \mathcal{C}^2$ (dle 1): $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(x) = A\Big(x, \varphi(x), \nabla F, \nabla^2 F, \nabla \varphi\Big) \Rightarrow$ spojité (A je nějaký výraz)

□

Příklad 2.1 $\Gamma := \{x^2 + y^4 = 1\}$, $F(x,y) = x^2 + y^4 - 1$

$\nabla F = (2x, 4y^3)$

Γ lokálně: chci $y = \varphi(x)$, potřebuji $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$: $y \neq 0$

$x = \varphi(y)$, potřebuji $\frac{\partial F}{\partial x} \neq 0 \;\Leftrightarrow\; x \neq 0$

Zvolme: $a = 0, b = -1$

$\frac{\partial F}{\partial y}(a; b) = -4 \neq 0$

$\exists \delta, \Delta > 0$, $\varphi(x) : \mathcal{U}(0,\delta) \;\to\; \mathcal{U}(-1,\Delta)$: $F(x,y) = 0 \;\Leftrightarrow\; y = \varphi(x)$

$\varphi(x) \in \mathcal{C}^\infty$ ($y = -\sqrt[4]{1-x^2}$ umím explicitně)

na okolí 0: $x^2 + [\varphi(x)]^4 = 1 \;\Big/ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$

$2x + 4\varphi'(x)\varphi^3(x) = 0 \;\Big/ x = 0 :\; 0 + 4\varphi'(0) \cdot \underbrace{\varphi(0)}_{=-1} = 0 \;\Rightarrow\; \varphi'(0) = 0$

$2 + 4(\varphi''(x)\varphi^3(x) + [\varphi'(x)]^2 \cdot 3\varphi^2(x)) = 0 \quad x = 0 :$

$2 + 4\varphi''(0) \cdot (-1) = 0 \;\Rightarrow\; \varphi''(0) = \frac{1}{2}$

Věta 2.2 (<u>IMPLICITNÍ FUNKCE - OBECNÁ VERZE.</u>) Nechť $F_i(\vec{x},\vec{y}) : \mathbb{R}^{n+s} \to \mathbb{R}$, $i = 1,\dots,s$ (tj. $\vec{x} = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\vec{y} = (y_1,\dots,y_s) \in \mathbb{R}^s$). Nechť $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^s$ jsou takové, že

1. $F_i(\vec{a},\vec{b}) = 0 \;\forall i = 1,\dots,s$
2. F_i jsou $\mathcal{C}^1$ na okolí bodu $(\vec{a},\vec{b})$ $\forall i = 1,\dots,s$
3. matice $\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(\vec{a},\vec{b})\right)_{i,j=1\dots s}$ je regulární.

Potom existují δ, $\Delta > 0$ taková, že pro každé $\vec{x} \in U(\vec{a},\delta)$ existuje jediné $\vec{y} = (y_1,\dots,y_s) \in \mathcal{U}(b,\Delta)$ tak, že $F(\vec{x},\vec{y}) = 0$.

Označíme-li tato $y_i = \varphi_i(\vec{x})$, $i = 1,\dots,s$, jsou $\varphi_i(\vec{x}) \in \mathcal{C}^1\Big(\mathcal{U}(\vec{a},\delta)\Big)$.

Obecněji, je-li F třídy $\mathcal{C}^k$, $k \in \mathbb{N}$ na okolí bodu $(\vec{a},b)$, jsou $\varphi_i(\vec{x}) \in \mathcal{C}^k\Big(\mathcal{U}(\vec{a},\delta)\Big)$.

Důkaz věty 2.2 VYNECHÁVÁME

$\square$

Příklad 2.2 $\Gamma := \begin{cases} F_1: & x^2 + y^3 + \sin(xu) - \frac{4}{\pi}\texttt{arctg}\ v = 0 \\ F_2: & u^2 + \ln v - \frac{x}{y} - 1 = 0 \end{cases}$ Tedy: $\underbrace{(\underbrace{x, y}_{\vec{x}}, \underbrace{u, v}_{\vec{y}})}_{\text{z předchozí věty:}}$

okolí: (0,1,1,1)

chci: $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$

DCV: bod (0,1,1,1) vyhovuje rovnicím

$F_1, F_2 \in \mathcal{C}^\infty\Big((0,1,1,1)\Big)$

$\frac{\partial F_{1,2}}{\partial uv} = \begin{pmatrix} x\cos(xu) & -\frac{4}{\pi}\frac{1}{v^2+1} \\ 2u & \frac{1}{v} \end{pmatrix} \Big|_{(0,1,1,1)} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{\pi} \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ... regulární

v bodě $(x, y, u, v) = (\underbrace{0, 1}_{a}, \underbrace{1, 1}_{b}) \equiv A$

$\exists \delta > 0, \Delta > 0 \ \ \forall (x, y) \in \mathcal{U}\left((0,1), \delta\right)$

$\exists!(u, v) \in \mathcal{U}\left((1,1), \Delta\right)$ $F_i(x, y, u, v) = 0$ $i = 1, 2$ označ: $u = u(x, y), v = v(x, y) \in \mathcal{C}^1\Big(\mathcal{U}\left((0,1), \delta\right)\Big)$ $(\mathcal{C}^\infty)$

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^3 + \sin(x \cdot u(x,y)) - \tfrac{4}{\pi}\texttt{arctg}\ v(x,y) = 0 \\ u^2(x,y) + \ln v(x,y) - \tfrac{x}{y} - 1 = 0 \end{aligned}\right/ \frac{\partial}{\partial x}$$

$\forall (x, y) \in \mathcal{U}\left((0,1), \delta\right)$

$$\left.\begin{aligned} 2x + \cos(x \cdot u) \cdot (u + x u_x) - \tfrac{4}{\pi}\tfrac{v_x}{1+v^2} = 0 \\ 2u u_x + \tfrac{1}{v} v_x - \tfrac{1}{y} = 0 \end{aligned}\right/ (x, y) = (0, 1) \ \ \Rightarrow \ \ (u, v) = (1, 1)$$

teď: dosaď $(x, y) = (0, 1) \ \ \Rightarrow \ \ (u, v) = (1, 1)$

$u(0, 1) = 1$, $v(0, 1) = 1$

$$\begin{aligned} 0 + 1[1 + 0 \cdot u_x] - \tfrac{4}{\pi}\tfrac{1}{2} v_x = 0 \\ 2u_x + v_x - 1 = 0 \end{aligned}$$

$v_x(0, 1) = \frac{\pi}{2}$

$u_x(0,1) = (\frac{-\pi}{2} + 1)\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1 - \frac{\pi}{2})$

Poznámka 2.3 Důsledek Věty 2.1 : důkaz věty 1.5 :

$G(x), F(x) \in \mathcal{C}^1 \in (\mathbb{R}^n)$, $\vec{a} \in \mathbb{R}^n \dots G(\vec{a}) = 0$ $\vec{a}$ je lokální extrém $F(\vec{x})$ vůči $\Gamma := \{\vec{x} : G(\vec{x}) = 0\}$.

Cíl: $\exists \lambda \in \mathbb{R} : \nabla F(\vec{a}) = \lambda \nabla G(\vec{a})$.

$\nabla G(\vec{a}) \neq 0$: BÚNO $\frac{\partial G}{\partial x_n}(\vec{a}) \neq 0$, $G(\underbrace{x_1, \dots, x_{n-1}}_{x}, \underbrace{x_n}_{y})$ $\dots$ $(n-1)$-dim. užití věty 1.5 .

Označme $\vec{\alpha} = (a_1, \dots, a_{n-1})$, $\vec{a} = \Big(\vec{\alpha}, \varphi(\vec{\alpha})\Big)$.

Víme, že $\exists \delta > 0, \Delta > 0, \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}) : \ \mathcal{U}(\vec{\alpha}, \delta) \to \mathcal{U}(a_n, \Delta) \ \in \mathcal{C}^1\Big(\mathcal{U}(\vec{\alpha}, \delta)\Big)$

na okolí $\vec{a}$: $\vec{x} \ \in \ \Gamma \Leftrightarrow \vec{x} = (x_1, \dots, x_{n-1}, \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}))$

$\vec{\alpha}$ je extrém fce f v bodě $\vec{\alpha}$ vůči $\mathcal{U}(\vec{\alpha}, \delta)$.

Z věty 1.2 : $\nabla f(\vec{\alpha}) = 0 : \forall i = 1, \dots, n-1$:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(\vec{\alpha}) = \frac{\partial F}{\partial x_i}(\underbrace{\alpha, \varphi(\alpha)}_{\vec{a}}) + \frac{\partial F}{\partial x_n}(\underbrace{\alpha, \varphi(\alpha)}_{\vec{a}}) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\vec{\alpha}) = 0 \qquad (1)$$

Z věty 2.1 :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\vec{\alpha}) = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x_i}(\vec{a})}{\frac{\partial G}{\partial x_n}(\vec{a})} \qquad (2)$$

Tvrdím:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(\vec{a}) = \lambda \frac{\partial G}{\partial x_i}(a) \ \ \forall i = 1, \dots, n, \text{ kde } \lambda = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_n}(\vec{a})}{\frac{\partial G}{\partial x_n}(\vec{a})}.$$

Pro $i = 1, \dots, n-1$: z rovnic (1), (2):

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = -\frac{\partial F}{\partial x_n}(\vec{a}) \cdot \Big(\frac{-1}{\frac{\partial G}{\partial x_n}(\vec{a})}\Big) \frac{\partial G(\vec{a})}{\partial x_i}$$

Pro $i = n : \frac{\partial F}{\partial x_n}(\vec{a}) = \lambda \cdot \frac{\partial G}{\partial x_n}(\vec{a})$ plyne ihned.

Věta 2.3 (<u>Věta o inverzní funkci.</u>) Nechť $\vec{F}(\vec{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (tj. $\vec{F} = (F_1, \dots, F_n)$, kde $F_i = F_i(x_1, \dots, x_n)$) je $\mathcal{C}^1$ na okolí bodu $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$. Nechť matice $\nabla \vec{F}(\vec{a}) = \Big(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\vec{a})\Big)_{i,j=1\dots n}$ je regulární. Potom

1. existuje $\mathcal{U}$ okolí bodu $\vec{a}$ takové, že $\vec{F}(\vec{x})$ je prostá na $\mathcal{U}$. Označíme-li $\vec{b} = \vec{F}(a)$, $\vec{G} = (\vec{F}|_{\mathcal{U}})_{-1}$ a $V = \vec{F}(\mathcal{U})$, je $V \subset \mathbb{R}^n$ otevřená množina, obsahující bod b, a funkce $\vec{G}$ (kde $\vec{G} = (G_1, \dots, G_n)$, $G_i = G_i(y_1, \dots, y_n)$) je $\mathcal{C}^1$ na V. Dále platí $\nabla \vec{G}(\vec{y}) = \Big[\nabla \vec{F}(\vec{G}(\vec{y}))\Big]^{-1} \qquad \vec{y} \in V$.

2. Je-li $\vec{F} \in \mathcal{C}^k(\mathcal{U})$, $k \in \mathbb{N}$, je též $\vec{G} \in \mathcal{C}^k(V)$.

Důkaz věty 2.3 VYNECHÁVÁME

$\square$

Příklad 2.3 $x = r\cos\varphi\,,\ \ y = r\sin\varphi$

$\vec{F}:\ \ (r,\varphi) \to (x,y)\,,\ \ n = 2$

$$\begin{pmatrix} x\{\cos\varphi & -r\sin\varphi \\ y\{\underbrace{\sin\varphi}_{\partial r} & \underbrace{r\cos\varphi}_{\partial\varphi} \end{pmatrix} \ \ldots\ \det(\nabla F) = r; \quad r \neq 0$$

- v okolí bodu mimo počátek lze invertovat zobrazení $\vec{F}$
- v žádném okolí počátku to nejde

Kapitola 3

Klasický variační počet

Pojmy v této kapitole: Nosič funkce, shlazovací funkce, lemma o slabé formulaci diferenciální rovnice, Euler-Lagrangeova rovnice, Lagrangeovy multiplikátory v nekonečné dimenzi, Jacobiho rovnice, konjugovaný bod, Jacobiho věta.

Úmluva značení 3.1 Během celé kapitoly předpokládáme:

$\Phi(x) : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$,

$\mathcal{X}$ je ∞-dim. prostor, normovaný, např. $\mathcal{C}^1\Big((0,1)\Big)$

Φ je funkcionál

Poznámka 3.1 $B := \{x \in \mathcal{X} : ||x||_{\mathcal{X}} \leq R\}$

- $\dim \mathcal{X} < \infty$ ... $\mathbb{R}^n$ ... B je kompakt; $\Phi(x)$ spojitý $\Rightarrow$ $\exists$ maximum, minimum
- $\dim \mathcal{X} = \infty$ ... $\mathbb{R}^n$ ... B není kompakt: $\Phi(x)$ ač spojité, nemusí mít extrém

klasický:

$$\Phi(y) = \int_a^b f\Big(x, y(x), y'(x)\Big)\ \mathrm{d}x\ ;\quad \mathcal{X} := \{y(x) : [a,b] \to R\}$$

Příklad 3.1

$$\Phi(y) = 2\pi \int_0^1 |y|\sqrt{1 + (y')^2}$$

$$\mathcal{M} = \{y : [0,1] \to \mathbb{R} : y(0) = y(1) = A\}$$

Význam: najdi funkci z $\mathcal{M}$ tak, aby plocha vzniklá rotací byla maximální.

Příklad 3.2

$$\Phi(y) = \int_0^1 y$$

$$\mathcal{M} = \{y : (0,1) \to \mathbb{R} : y(0) = y(1) = 0; \Psi(y) = l\},$$

$$\texttt{kde} \qquad \Psi(y) = \int_0^1 \sqrt{1+(y')^2}$$

Význam: najdi funkci s grafem dané délky, pod níž je maximální plocha.

Definice 3.1 (NOSIČ FUNKCE.) Nechť $k \geq 0$ celé, $a < b \in \mathbb{R}$. Definujeme

$$\mathcal{C}^k([a,b]) = \left\{ \tilde{y}|_{[a,b]} : \ \tilde{y} \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}) \right\}$$
$$\mathcal{C}^1_0([a,b]) = \left\{ y \in \mathcal{C}^1([a,b]) : \ y(a) = y(b) = 0 \right\}$$

NOSIČ FUNKCE

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x : \ f(x) \neq 0\}}$$

Definice 3.2 (DŮLEŽITÁ KONSTRUKCE - SHLAZOVACÍ FUNKCE.) SHLAZOVACÍ FUNKCE (molifiér, bump function, seřezávací funkce) se definuje jako

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & |x| \geq 1 \\ \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right) & |x| < 1 \end{cases}$$

Základní vlastnosti ϕ:

- $\phi(x) \geq 0$ v $\mathbb{R}$
- $\phi(x) = 0$ pro $|x| \geq 1$, $\phi(x) > 0$ pro $|x| < 1$
- $\phi(x) \in \mathcal{C}^\infty(R)$

Seřezávací funkce s nosičem v $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ se dostane jako

$$\phi_{a,\varepsilon}(x) = \phi\left(\frac{x-a}{\varepsilon}\right).$$

Poznámka 3.2 Značení:

$$\begin{aligned} &\Phi(y) = \textstyle\int_a^b f\Big(x, y(x), y'(x)\Big)\ \mathrm{d}x \\ &y \in \mathcal{M} = \{y \in \mathcal{C}^1\Big([a,b]\Big) : y(a) = A; y(b) = B\} \end{aligned} \qquad \Big(*\Big)$$

Poznámka 3.3

- předpokládáme $f = f(x,y,z) \in \mathcal{C}\Big(\mathbb{R}^3\Big)$
- v celé kapitole integruji spojité funkce

- cíl: alanogie s $F(\vec{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

  $\vec{a}$ je lokální extrém $\Rightarrow$ $\vec{a}$ řeší soustavu $\nabla F(\vec{a}) = \vec{0}$

  y je lokální extrém Φ $\Rightarrow$ y řeší jistou diferenciální rovnici

Lemma 3.1 (Slabá formulace diferenciální rovnice.)

1. Nechť $u(x) \in \mathcal{C}\Big([a,b]\Big)$. Potom $u(x) = 0$ pro $\forall x \in [a,b]$ právě když

$$\int_a^b u(x)h(x)\,dx = 0 \qquad \forall h \in \mathcal{C}_0^1\Big([a,b]\Big).$$

2. Nechť navíc $v(x) \in \mathcal{C}^1([a,b])$. Potom $u(x) + v'(x) = 0$ pro $\forall x \in [a,b]$ právě když

$$\int_a^b u(x)h(x) - v(x)h'(x)\,dx = 0 \qquad \forall h \in \mathcal{C}_0^1\Big([a,b]\Big).$$

Důkaz lemmatu 3.1 (1) $\Rightarrow$ zřejmé: $u = 0$ & h libovolné $\Rightarrow \int_a^b 0 \text{ d}x = 0$

$\Leftarrow$ Sporem: Nechť $u \not\equiv 0$, pak hledám $\mathcal{C}_0^1\Big([a,b]\Big)$, aby $\int_a^b uh(x) \neq 0$. Tedy $\exists c$, $u(c) \neq 0$: BÚNO $c \in (a,b)$, $u(c) > 0$. Potom $\exists \varepsilon > 0$: $\mathcal{U}(c,\varepsilon) \in (a,b)$, navíc $u(x) > 0$ na $\mathcal{U}(c,\varepsilon)$, což plyne ze spojitosti $u(x)$

vezmi $h(x)$ zhlazovací funkci s nosičem v $[c-\varepsilon; c+\varepsilon]$.

Vlastnosti $h(x)$: $\left.\begin{array}{ll} h > 0 & \text{v } \mathcal{U}(c,\varepsilon) \\ h = 0 & \text{mimo } \mathcal{U}(c,\varepsilon) \\ \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) & \text{v } \mathcal{U}(c,\varepsilon) \end{array}\right\} \in \mathcal{C}_0^1\Big([a,b]\Big)$

$u(x)h(x) \geq 0$ v $[a,b]$

$u(c)h(c) = A > 0$

$\exists\, \delta > 0$: $u(x)h(x) \geq \frac{A}{2}$ na $\mathcal{U}(c,\delta)$

$\int_a^b uh \;\geq\; \int_{c-\delta}^{c+\delta} uh \;\geq\; \frac{A}{2} \cdot 2\delta > 0$. Spor.

(2) trik: per partes 2. členu:

$-\int_a^b v(x)h'(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{-[v(x)h(x)]_a^b}_{=0} + \int_a^b v'(x)h(x)\,\mathrm{d}x.$

Integrál ve (2) má tvar

$\int_a^b \Big[u(x) + v'(x)\Big]h(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \forall h \in \mathcal{C}_0^1\Big([a,b]\Big) \Leftrightarrow u(x) + v'(x) = 0$ v $[a,b]$ dle (1). $\square$

Poznámka 3.4

- Integrál v (2) má smysl, i když $v'(x)$ není definována $\Rightarrow$ SLABÁ FORMULACE rovnice $u + v' = 0$.
- Předpoklad $v \in \mathcal{C}^1$ lze vynechat (protože vyplývá ze slabé formulace).

Definice 3.3 Nechť $\Phi(x) : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, kde $\mathcal{X}$ je normovaný prostor.

1. Nechť x_0, $h \in \mathcal{X}$. Limita (pokud existuje)

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[\Phi(x_0 + th) - \Phi(x_0)\right]$$

se nazývá (GÂTEAUXŮV DIFERENCIÁL) Φ v bodě x_0 ve směru h. Značí se $D\Phi(x_0; h)$.

2. Nechť $x_0 \in \mathcal{X}$. Existuje-li spojité lineární zobrazení $A : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, splňující

$$\Phi(x_0 + h) = \Phi(x_0) + Ah + o(\|h\|), \qquad h \to 0,$$

nazývá se (FRECHETŮV DIFERENCIÁL) Φ v bodě x_0. Značí se $\Phi'(x_0)$.

Úmluva značení 3.2 Studujeme funkcionál $\Phi(y) : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$, kde

$$\mathcal{M} = \left\{y \in \mathcal{C}^1([a,b]) : \ y(a) = A,\ y(b) = B\right\}$$

a

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x, y(x), y'(x))\,dx\,.$$

Poznámka 3.5

- Gâteauxův diferenciál - analogie s derivací ve směru, Frechetův diferenciál - analogie s totálním diferenciálem.

  Platí např.:

$\exists\ \Phi(x_0) \Rightarrow \Phi$ je spojitý v x_0

$$\Rightarrow \forall h\ \exists D\Phi(x_0, h) = \Phi'(x_0)[h]$$

- !!! $D\Phi(x_0)[h]$ lze počítat, i když x_0, h leží obecně v různých prostorech: stačí $x_0 + th \in \underbrace{\mathcal{D}(\Phi)}_{\text{definiční obor}}$ pro $t \in \mathcal{U}(0)$

příklad (∗): mohu počítat $D\Phi(y_0)[h]$; $\mathcal{D}(\Phi) = \mathcal{C}^1$, $h \in \mathcal{C}_0^1\Big([a,b]\Big)$

Tedy

$$D(\Phi) = \{y(x) \in \mathcal{C}\Big([a,b]\Big) : y(a) = A, y(b) = B\}$$

Potom

$$y_0 \in D(\Phi), \quad h \in \mathcal{C}\Big([a,b]\Big) \quad \Rightarrow \quad y_0 + th \in D(\Phi)$$

tudíž lze počítat

$$D\Phi(y_0, h) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[\Phi(y_0 + th) - \Phi(y_0)].$$

Věta 3.1 (<u>Euler-Lagrangeova rovnice.</u>) Nechť $\mathcal{M}$, $\Phi(y)$ jsou jako výše. Nechť $f = f(x, y, z) \in C^1(R^3)$.

1. Pro každé $y_0 \in \mathcal{M}$, $h \in \mathcal{C}_0^1([a,b])$ platí

$$D\Phi(y_0; h) = \int_a^b f_y(x, y_0(x), y_0'(x))h(x) + f_z(x, y_0(x), y_0'(x))h'(x)\,.$$

2. Je-li navíc $f \in \mathcal{C}^2$, $y_0 \in \mathcal{C}^2$, je podmínka $D\Phi(y_0; h) = 0$ pro $\forall h \in \mathcal{C}_0^1([a,b])$ ekvivalentní diferenciální rovnici

$$0 = f_y(x, y_0(x), y_0'(x)) - [f_z(x, y_0(x), y_0'(x))]' \qquad x \in (a,b)$$

Poznámka 3.6

- Rovnice v (2) se nazývá Euler- Lagrangeova rovnice funkcionálu Φ.
- Pokud funkce $y(x) \in \mathcal{M}$ řeší Euler- Lagrangeovu rovnici, pak ji nazvu extremálou.
- Existuje-li extrém a je-li navíc $\mathcal{C}^2 \Rightarrow$ je extremálou.

Důkaz věty 3.1 Ad (2): Dáno f, $y_0 \in \mathcal{C}^2$. Nechť $D\Phi(y_0, h) = 0\ \forall h \in \mathcal{C}_0^1\Big([a,b]\Big)$.

Z Lemmatu 3.1 plyne: $u(x) = f_y\Big(x, y(x), y'(x)\Big) \in \mathcal{C}\Big([a,b]\Big)$,

dále $v(x) = -f_z\Big(x, y(x), y'(x)\Big) \in \mathcal{C}^1\Big([a,b]\Big)$. Potom tedy $\Rightarrow u - v' = 0$ v [a,b], což je závěr (2).

Ad (1): Z definice Gâteauxova diferenciálu: $\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big[\Phi(y_0+th)-\Phi(y_0)\Big]$, dosazením:

$$\lim_{t\to 0}\int_a^b \frac{1}{t}\Big[f\Big(x,y_0(x)-th(x),y_0'(x)-th'(x)\Big)-f\Big(x,y_0(x),y_0'(x)\Big)\Big]\,\mathrm{d}x$$

Provedu záměnu limity a integrálu:

$$\int_a^b \Big\{\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big[f\Big(x,y_0(x)-th(x),y_0'(x)-th'(x)\Big)-f\Big(x,y_0(x),y_0'(x)\Big)\Big]\Big\}\,\mathrm{d}x$$

Označme: $\varphi(t)=f\Big(x,y_0(x)+th(x),y_0'(x)+th'(x)\Big)$, tedy pro výraz ve složených závorkách platí $\{\dots\}=\varphi'(0)$.

Označme $f=f(x,y,z)=f\Big(x,y(x),y'(x)\Big)$. Tedy platí

$$\varphi'(t)=f_y\Big(x,y_0(x)-th(x),y_0'(x)-th'(x)\Big)\cdot h(x)+f_z\Big(x,y_0(x)-th(x),y_0'(x)-th'(x)\Big)\cdot h'(x),$$

a tedy

$$\varphi'(0)=f_y\Big(x,y_0(x),y_0'(x)\Big)\cdot h(x)+f_z\Big(x,y_0(x),y_0'(x)\Big)\cdot h'(x),$$

$\square$

Příklad 3.3 Zadání: Najděte minimum: $\mathcal{M}=\{y\in\mathcal{C}^1\Big([0,1]\Big):y(0)=y(1)=A\}$

$\Phi(y)=2\pi\int_0^1 y\sqrt{1+\Big(y'(x)\Big)^2}\ \mathrm{d}x$

$f(x,y,z)=2\pi y\sqrt{1+z^2}$

Řešení: $f_y=2\pi\sqrt{1+z^2}$, $f_z=\frac{2\pi yz}{\sqrt{1+z^2}}$

Dodatečný předpoklad: $y\geq 0$ (hledám minimum $\to$ není to omezení)

Z Euler-Lagrangeovy rovnice: $2\pi\sqrt{1+(y')^2}-\left[\frac{2\pi yy'}{\sqrt{1+(y')^2}}\right]'=0$

Trik: Pokud $f=f(y,z)$, pak Euler-Lagrangeova rovnice má tvar $f(y,y')-y'f_z(y,y')=K$, kde K je vhodná konstanta.

Důkaz triku:

$$\Big[f(y,y')-y'f_z(y,y')\Big]'=f_y\cdot y'+f_z\cdot y''-y''f_z-y'[f_z]'=y'(f_y-[f_z]')=0,$$

kde výraz před posledním = je Euler-Lagrangeova rovnice krát y'.

Z Euler-Lagrangeovy rovnice plyne:

$$2\pi y\sqrt{1+(y')^2} - y'\frac{2\pi yy'}{\sqrt{1+(y')^2}} = K$$

$$y\Big(\sqrt{1+(y')^2} - \frac{(y')^2}{\sqrt{1+(y')^2}}\Big) = K,$$

a tedy

$$\frac{y}{\sqrt{1+(y')^2}} = K \text{ v } [a,b]$$

řešení:

1. $y' = 0$ na $(\alpha,\beta) \subset [a,b]$, tedy $y \equiv K$
2. $y' > 0$ na $(\alpha,\beta) \subset [a,b]$, tedy $y' = \sqrt{\left(\frac{y}{K}\right)^2 - 1}$, odkud plyne
$$y(x) = K\cosh\Big(\frac{x-c}{K}\Big), \qquad x > c$$
3. $y' < 0$ na $(\alpha,\beta) \subset [a,b]$, tedy $y' = \sqrt{\left(\frac{y}{K}\right)^2 - 1}$, odkud plyne
$$y(x) = K\cosh\Big(\frac{x-c}{K}\Big), \qquad x < c$$

Globální řešení: $\mathcal{C}^2$

Diskuse řešení:

1. Výraz $y \equiv K$ na [a,b] neřeší Euler-Lagrangeovu rovnici.
2. Řešení ve tvaru klesající cosh - konstantní fce - rostoucí cosh není $\mathcal{C}^2$ funkce v bodech napojení (jednotlivých částí řešení)
3. Tedy
$$y(x) = K\cosh\Big(\frac{x-c}{K}\Big)\Big|_{y(0)=y(1)} = K\cosh\Big(\frac{2x-1}{2K}\Big), \qquad x < c$$
Okrajové podmínky: $y(0) = y(1) = A = K\cosh\left(\frac{1}{2K}\right) = g(K)$

   $g(K)$ je kladná, ryze konvexní v $(0,+\infty)$, $g(0+) = g(+\infty-) = +infty$, tedy $\exists K_0 > 0$: $g(K_0) = A_0$ je ostré globální minimum $g(K)$. V našem případě $A_0 \doteq 0,75$.

<u>Závěry:</u>

1. Pro $A < A_0$ funkcionál $\Phi(y)$ nemá ani lokální extrém. Čím blíže k úsečce, tím menší plocha, která není $\mathcal{C}^2$. Limita je bazének (0,1)

2. Pro $A = A_0$ existuje řešení ve tvaru $y(x) = K_0 \cosh\left(\frac{2x-1}{K_0}\right)$

3. Pro $A > A_0$ existují dvě konstanty K' a K'', pro které najdeme řešení ve tvaru $y(x) = K \cosh\left(\frac{2x-1}{K_0}\right)$

Otázka: jsou závěry (2) a (3) alespoň lokální extrémy? Nevíme.

Příklad 3.4 Mějme funkcionál $\Phi(y) = \int_0^\pi (y'+y)^2 + 2y\sin x$; $y(0) = 0$, $y(\pi) = 1$.

Platí $f(x,y,z) = (z+y)^2 + 2\sin x$, tedy $f_y = 2(z+y) + 2\sin x$ a také $f_z = 2(z+y)$

Euler-Lagrangeova rovnice:

$$f_y(x,y,y') - \Big(f_z(x,y,y')\Big)' = 2(y'+y) + 2\sin x - \Big(2(y'+y)\Big)' = 2y' + 2y + 2\sin x - 2y'' - 2y'$$

Euler-Lagrangeova rovnice:

$$\left.\begin{array}{l} y'' - y = \sin x \\ y(0) = 0, \quad y(\pi) = 1 \end{array}\right\} \quad \text{tedy} \quad y_0(x) = \frac{\sinh(x)}{\sinh(\pi)} - \frac{1}{2}\sin x \quad \text{je jediná extremála,}$$

zkusme $\Phi(y_0 + \eta) - \Phi(y_0)$, kde $\eta \in \mathcal{C}_0^1\Big([0,\pi]\Big)$:

$$\Phi(y_0+\eta) - \Phi(y_0) = \int_0^\pi (y' + \eta' + y_0 + \eta)^2 + 2(y_0+\eta)\sin x - (y_0' + y_0)^2 - 2y_0 \sin x \; \mathrm{d}x = \dots,$$

kde

$$\Big[(y_0' + y_0) + (\eta' + \eta)\Big]^2 = (y_0' + y_0)^2 + 2(y_0' + y_0)(\eta' + \eta) + (\eta' + \eta)^2$$

tedy

$$\dots = \int_0^\pi (\eta' + \eta)^2 + \underbrace{\int_0^\pi 2(y_0 + y')(\eta + \eta') + 2\eta \sin x}_{?=0} = \int_0^\pi (\eta + \eta')^2 \geq 0$$

pak y_0 je globální minimum. Proč? Funkcionál Φ je kvadratický.

$$D^2\Phi(y_0; \eta, \eta)$$

Tedy

$$2\int_0^\pi y_0\eta + \underbrace{y_0\eta' + y_0'\eta}_{\text{zruší se}} + 2\eta \sin x \; \mathrm{d}x$$

Tedy po zrušení:

$$\int_0^\pi y_0\eta' = \underbrace{[y_0\eta]_0^\pi}_{= \; 0, \text{ protože } \eta \in \mathcal{C}_0^1\left([0,\pi]\right)} - \int_0^\pi y_0'\eta$$

Tedy

$$\int_0^\pi y_0\eta + y_0\text{'}\eta\text{'} + 2\eta\sin x \;\mathrm{d}x = 0$$

Z Lemmatu 3.1, části 2 plyne

$$y_0 - y\text{''} + \sin x = 0$$

Příklad 3.5 Mějme funkcionál $\Phi(y) = \int_0^\pi (y')^2 - \frac{9}{4}y^2 + 18y$; $y(0) = 4$, $y(\pi) = 0$.

Platí $f(x,y,z) = z^2 - \frac{9}{4}y^2 + 18y$, tedy $f_y = -\frac{9}{2}y + 18$ a také $f_z = 2z$

Euler-Lagrangeova rovnice: $f_y(x,y,y') - \Big(f_z(x,y,y')\Big)' = -\frac{9}{2}y + 18 - 2y'' = 0$, odkud

$$y'' + \frac{9}{4}y = 9$$

Řešením předchozí rovnice je $y_0 - 4 + \alpha\cos\left(\frac{3}{2}x\right) + \beta\sin\left(\frac{3}{2}x\right)$. Přidáme-li okrajové podmínky, získáme řešení ve tvaru

$$y_0 = 4 + 4\sin\left(\frac{3}{2}x\right).$$

Dále tedy

$$\Phi(y_0+\eta) - \Phi(y_0) = \int_0^\pi (y_0'+\eta')^2 - \frac{9}{2}(y_0+\eta)^2 + 18(y_0+\eta) - (y_0')^2 + \frac{9}{4}y_0^2 - 18y_0 \;\mathrm{d}x =$$

$$= (y_0'+\eta')^2 = (y_0')^2 + 2y_0'\eta' + (\eta')^2|_{(y_0'+\eta')^2 = (y_0')^2 + 2y_0\eta + \eta^2} =$$

$$\int_0^\pi (\eta')^2 - \frac{9}{4}\eta^2 + \underbrace{[2y_0'\eta' - \frac{9}{4}y_0\eta + 18\eta]}_{\text{per partes: } [\ldots]=0 \text{ dle Euler-Lagrangeovy rce}} \;\mathrm{d}x$$

Zvol $\eta = \sin x$, potom $\Phi(y_0+\eta) - \Phi(y_0) = \int_0^\pi \cos^2 x - \frac{9}{4}\sin^2 x = \frac{\pi}{2}(1 - \frac{9}{4}) < 0$.

Nechť $\eta = \sin 2x$, potom $\Phi(y_0+\eta) - \Phi(y_0) = \int_0^\pi 4\cos^2 2x - \frac{9}{4}\sin^2 2x = \frac{\pi}{2}(4 - \frac{9}{4}) > 0$.

Tedy $\Phi(y_0)$ je sedlový bod.

Poznámka 3.7

$$\int_0^\pi \sin^2 kx = \int_0^\pi \cos^2 kx = \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{N}$$

Věta 3.2 (<u>Lagrangeovy multiplikátory v nekonečné dimenzi.</u>) Nechť $\Phi(x)$, $\Psi(x) : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, kde X je normovaný prostor, který je úplný. Označme

$$\Gamma = \{x \in \mathcal{X} : \; \Psi(x) = 0\}$$

Nechť Φ má v bodě $x_0 \in \Gamma$ lokální extrém vůči Γ. Nechť existují Frechetovy diferenciály $\Phi'(x_0)$, $\Psi'(x_0)$ a nechť navíc $\Psi'(x_0) \neq 0$ a $\Psi(x)$ je spojitý na jistém okolí bodu x_0.

Potom existuje $\lambda \in \mathbb{R}$ (Lagrangeův multiplikátor) tak, že

$$\Phi'(x_0) = \lambda \Psi'(x_0)$$

Důkaz věty 3.2 Vynecháváme.

□

Příklad 3.6 Nechť $\mathcal{M} := \mathcal{C}_0^1\Big([a,b]\Big)$, $\Phi(y) = \int_a^b y(x)\ \mathrm{d}x$, $l = \Psi(y) = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}\ \mathrm{d}x$, $l \geq (b-a)$ pevné.

Nyní pracuji s Gâteauxovými diferenciály: $D\Phi(y;h) = \lambda D\Psi(y;h)$ pro všechna $h \in \mathcal{C}_0^1\Big([a,b]\Big)$

Také platí $D\Phi(y,h) = \int_a^b h(x)\ \mathrm{d}x$. Nechť $g = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$. Tedy: $\int_a^b h(x)\ \mathrm{d}x = \lambda \int_a^b \frac{y'h'}{\sqrt{1+(y')^2}}$ pro všechna $h \in \mathcal{C}_0^1\Big([a,b]\Big)$

Předpokládáme $y \in \mathcal{C}^2$. Z Lemmatu 3.1 plyne:

$$1 = -\Big[\lambda \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}\Big]', \text{ což se dá upravit na}$$

$$c + x = -\lambda \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}.$$

Předchozí výraz upravíme:

$$\frac{\lambda^2 (y')^2}{1+(y')^2} = (x+c)^2$$

a dostáváme

$$(y')^2 = \frac{x+c^2}{\lambda^2 - (x+c)^2}$$

Diskuse:

1. Nechť $y' \leq 0$ na $(\alpha,\beta) \subset [a,b]$, pak $y' = \frac{x+c}{\sqrt{\lambda^2-(x+c)^2}}$, odkud získáme řešení

$$y = d + \sqrt{\lambda^2 - (x+c)^2}$$

Závěr: y je extrém $\Rightarrow$ y je oblouk kružnice, nutně $l < \frac{\pi}{2}(b-a)$

2. Domněnka: je-li $l > \frac{\pi}{2}(b-a)$, pak řešením je větší oblouk kružnice.

Poznámka 3.8 Spojitost $\Phi(y) : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$, kde $\mathcal{M} \subset \mathcal{C}^1\Big([a,b]\Big)$.

Normu definuji jako

$$\|y\|_{\mathcal{C}^1\big([a,b]\big)} := \sup_{x\in[a,b]} \{|y(x)| + |y'(x)|\},$$

tj. $\|y\|_{\mathcal{C}^1\big([a,b]\big)}$ je nejlepší $K \geq 0$ tak, že

$$|y(x)| \leq K, \quad |y'(x)| \leq K \quad \text{v } [a,b],$$

tedy funkcionál

$$\Phi(y) := \int_a^b y(x)\sqrt{1 + [y(x)]^2}\ \mathrm{d}x \text{ spojitý.}$$

Nechť

$$\mathcal{M} = \mathcal{C}^1 \cap \{y(a) = A\} \cap \{y(b) = B\},$$

potom $\Phi : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$. Tedy

$$\Phi(y+\eta) - \Phi(y) = \int_a^b (y+\eta)\sqrt{1+(y'+\eta')^2} - y\sqrt{1+(y')^2} \pm y\sqrt{1+(y'+\eta')^2} = \dots$$

$$= \int_a^b \eta\sqrt{1+(y'+\eta')^2} + y\Big(\sqrt{1+(y'+\eta')^2} - \sqrt{1+(y')^2}\Big),$$

kde $y \in \mathcal{M}$ je pevné, η probíhá $\mathcal{C}_0^1\Big([a,b]\Big)$. Použijeme vztah

$$\Big(\sqrt{1+(y'+\eta')^2} - \sqrt{1+(y')^2}\Big) = \frac{(y'+\eta')^2 - \Big(1+(y')^2\Big)}{\sqrt{1+(y'+\eta')^2} + \sqrt{1+(y')^2}} < 2y'\eta + (\eta')^2$$

Dále

$$|\Phi(y+\eta) - \Phi(y)| = \int_a^b |\eta|\sqrt{1+(y'+\eta')^2} + 2|y'||\eta'| + |\eta'|^2 \leq$$

$$\leq (b-a)\Big[\|\eta\|\Big(1 + (\|y\| + \|\eta\|^2)\Big) + 2\|y\|\|\eta\| + \|\eta\|^2\Big]$$

<u>Závěr:</u> Zjistili jsme, že pokud y pevné a $\|\eta\|_{\mathcal{C}^1\big([a,b]\big)} \to 0$, potom výraz $\to 0$.

Odtud plyne spojitost.

Věta 3.3 (<u>Jacobiho věta.</u>) Nechť $y_0 \in \mathcal{C}^2([a,b])$ je extremálou úlohy (*), nechť $f \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^3)$ a nechť $P(x) > 0$ v $[a,b]$.

1. Je-li y_0 lokální minimum, pak v intervalu (a,b) neexistuje konjugovaný bod.
2. Jestliže v intervalu $(a,b]$ neexistuje konjugovaný bod, je y_0 ostré lokální minimum.

Zrcadlová verze: $P(x) < 0$ v $[a,b]$, maximum místo minimum.

Důkaz věty 3.3 Vynecháváme.

Definice 3.4 (JACOBIHO ROVNICE.) Nechť y_0 je extremálou úlohy (*). Označme

$$P(x) = f_{zz}(x, y_0(x), y_0'(x))$$
$$Q(x) = f_{yy}(x, y_0(x), y_0'(x)) - [f_{yz}(x, y_0(x), y_0'(x))]'$$

Rovnice

$$[P(x)u'(x)]' - Q(x)u(x) = 0$$

se nazývá JACOBIHO ROVNICE.

(KONJUGOVANÝ BOD.) Bod $\tilde{x} \in (a, b]$ se nazve KONJUGOVANÝ BOD, pokud existuje netriviální (tj. ne identicky nulové) $u(x)$ řešení Jacobiho rovnice takové, že $u(a) = u(\tilde{x}) = 0$.

□

Příklad 3.7 Máme funkcionál $\Phi(y) = \int_1^2 \frac{(y')^3}{x^2}$, $y(1) = 1$, $y(2) = 4$.

Tedy $f(x, y, z) = \frac{z^3}{x}^2$.

E-L rce: $f_y - [f_z]' = \left[\frac{3(y')^2}{x^2}\right]' = 0$.

Víme: $f_y = 0$, $f_z = \frac{3z^2}{x^2}$

Po úpravě: $3(y')^2 = kx^2$, odkud získáme $y' = \pm\sqrt{\frac{k}{3}}x$. Hledané řešení má tvar

$$y = Ax^2 + B$$

Z okrajových podmínek: $y_0(x) = x^2$

Nyní sestavíme Jacobiho rovnici: $f_{zz} = \frac{6z}{x^2} \Rightarrow$

$$P(x) = \frac{6 \cdot 2x}{x^2} = \frac{12}{x} > 0 \text{ v } (1, 2)$$

Jelikož ale platí $f_{yy} = f_{yz} = 0$, má Jacobiho rovnice tvar

$$\left(\frac{12}{x}u'\right) = 0$$

Tuto rovnici řešíme a dostáváme:

$$\frac{12}{x}u' = A,$$

odkud

$$u' = \frac{A}{12}x$$

Tedy
$$u = \frac{A}{24}x^2 + B$$
je obecné řešení Jacobiho rovnice.

Diskuse:

- Pokud $A > 0$, pak řešení roste.
- Pokud $A < 0$, pak řešení klesá.
- Pokud $A = 0$, pak řešení je triviální ($\equiv 0$).

$\Rightarrow$ v $(1, 2]$ neexistuje konjugovaný bod.

Závěr: $y_0(x)$ je ostré lokální minimum $\Phi(y)$.

Příklad 3.8 Máme funkcionál $\Phi(y) = \int_0^\pi (y')^2 - \frac{9}{4}y^2 + 18y$ - již řešeno. Získali jsme řešení
$$y_0(x) = 4 + 4\sin\left(\frac{3}{2}x\right)$$
Funkce f má tvar $f = y^2 - \frac{9}{4}y^2 + 18y$. Dále $f_{zz} = 2 > 0$, $f_{yy} = -\frac{9}{2}$, $f_{yz} = 0$.

Jacobiho rovnice má tvar
$$(2u')' - \left(\frac{9}{2}u\right) = 0$$
Obecné řešení rovnice $u'' + \frac{9}{4}u = 0$ má tvar
$$u(x) = A\cos\left(\frac{3}{2}x\right) + B\sin\left(\frac{3}{2}x\right)$$
Položme $\tilde{u}(x) = \sin\left(\frac{3}{2}x\right)$, platí $\tilde{u}(0) = 0$ a $\tilde{u}\left(\frac{2}{3}\pi\right) = 0$, ale $u \not\equiv 0$. Tedy $\frac{2}{3}\pi \in (0, \pi)$ je konjugovaný bod.

Tedy $y_0(x) = 4 + 4\sin\left(\frac{3}{2}x\right)$ není ani lokální extrém.

Doplněk ke 3. kapitole:

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x)) \, \mathrm{d}x, \qquad \Phi : \mathcal{C}^1([a, b]) \to \mathbb{R}$$
Jak to vypadá se spojitostí funkcionálu?
$$f = f(x, y, z) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^3) \quad \Rightarrow \quad \Phi(y) \text{ spojité}$$
dle Heineho věty stačí: $y_n \to y_0$ v $\mathcal{C}^1([a, b]) \Rightarrow \Phi(y_n) \to \Phi(y_0)$

$y_n \to y_0$ v $\mathcal{C}^1([a,b])$ značí:

$$\begin{aligned} y_n(x) &\rightrightarrows y_0(x) \text{ v } [a,b] \\ y_n'(x) &\rightrightarrows y_0(x) \text{ v } [a,b] \\ \text{v } [a,b] &\text{ jednostranné derivace} \end{aligned}$$

Značení:

$$\begin{aligned} h_n(x) &= f(x, y_n(x), y_n'(x)) \\ h_0(x) &= f(x, y_n(x), y_n'(x)) \end{aligned}$$

$$\Phi(y_n) = \int_a^b h_n(x) \ \ \mathrm{d}x \xrightarrow{?} \int_a^b h_0(x) \ \ \mathrm{d}x = \Phi(y_0)$$

Klíčové pozorování:

$$h_n(x) \to h_0(x) \text{ všude v } [a,b] \ (f \text{ spojitá})$$

Záměna limity a integrálu: Lebesgueova věta:

- měřitelnost $\Leftarrow$ spojitost
- bodová konvergence: $h_n(x) \to h_0$
- majoranta $|h_n(x)| \le g(x) \in \mathcal{L}([a,b])$

$$\exists c > 0 \ \ |y_n(x)| \le c \text{ nezávisle na } x \text{ pro } n \ge n_0$$

$$y_n(x) = \underbrace{y_0(x)}_{\substack{|\ \ |\le C_1 \\ \text{spojitá na kompaktu}}} + \underbrace{y_n(x) - y_0(x)}_{|\ \ |\le 1}$$

tedy pro n dost velké

$$|y_n(x)| \le C = C_1 + 1 \quad \forall x \in [a,b] \ \ \forall n \ge n_0$$

analogicky $|y_n'(x)| \le C$

$$f = f(x,y,z) \in \mathcal{C}(\underbrace{[a,b] \times [-c,c] \times [-c,c]}_{M}) \text{ - kompakt}$$

Pak $\exists K > 0$ tak, že $|f| \le K$ na M

$$n \ge n_0 : \quad |h_n(x)| \le K \in \mathcal{L}([a,b])$$

Kapitola 4

Bodová a stejnoměrná konvergence

Pojmy v této kapitole: Bodová konvergence, (lokální) stejnoměrná konvegence, sjednocení množin. Věta o sigma en (σ_n), B.C. podmínka stejnoměrné konvergence, Moore-Osgoodova věta, zachování spojitosti při stejnoměrné konvergenci, záměna limity a integrálu při stejnoměrné konvergenci, o konečném podpokrytí, charakterizace lokálně stejnoměrné konvergence, Diniho věta, derivace člen po členu, integrace člen po členu.

Poznámka 4.1 V celé kapitole $f_n(x)$, $f(x) : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$, kde $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ je interval.

Definice 4.1 (Bodová konvergence.) Řekneme, že $f_n(x)$ konvergují bodově k $f(x)$ v $\mathcal{I}$, jestliže

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad \forall x \in \mathcal{I}\,.$$

Značíme: $f_n(x) \to f(x)$ v $\mathcal{I}$.

Příklad 4.1

1. Nechť $f_n(x) = \mathtt{arctg}\ (nx)$

   Potom

$$f_n(x) - f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\pi}{2} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ \frac{-\pi}{2} & x < 0 \end{array} \right\} = \frac{\pi}{2} \cdot \mathtt{sgn}\ (x)$$

2. Funkce $f_n(x) = \frac{n^2 x}{1+n^3x^3} \to 0$ v $[0; +\infty)$

3. Funkce $f_n(x) = \exp\Big(- (x-n)^2 \Big) \to 0$ v $\mathbb{R}$

Poznámka 4.2 Nevýhody bodové konvergence:

- obecně nezachovává spojitost: tj.

$$f_n(x) \in \mathcal{C}(\mathcal{I}),\ f_n(x) \to f(x) \not\Rightarrow f(x) \in \mathcal{C}(\mathcal{I})$$

- nelze přejít za integrační znamení

$$f_n(x) \to f(x) \text{ v } \mathcal{I} \not\Rightarrow \int_{\mathcal{I}} f_n(x) \to \int_{\mathcal{I}} f(x).$$

tzn.:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathcal{I}} f_n(x) \neq \int_{\mathcal{I}} \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

viz příklad 2):

$f_n(x) \to 0$ v $(0,1)$, ale ¨

$$\int_0^1 f_n(x) \ \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{n^2 x}{1+n^3x^3} \ \mathrm{d}x\Big|_{\text{subst. } nx=u} = \int_0^n \frac{u}{1+u^3} \ \mathrm{d}u \to \int_0^\infty \frac{u}{1+u^3} \quad > 0$$

Podobně

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x) \ \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \exp\Big(-(x-n)^2 \Big) \ \mathrm{d}x\Big|_{x-n=u} = \int_{\mathbb{R}} \exp\Big(-u^2 \Big) \ \mathrm{d}u = \sqrt{\pi} \not\to 0$$

Definice 4.2 (<u>Stejnoměrná konvergence.</u>) Řekneme, že $f_n(x)$ <u>konvergují stejnoměrně</u> k $f(x)$ v $\mathcal{I}$, jestliže

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in N)(\forall x \in \mathcal{I})(\forall n \geq n_0)\Big[|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \Big].$$

Značíme: $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ v $\mathcal{I}$.

Poznámka 4.3

- Víme, že $f_n(x) \to f(x)$ je ekvivalentní:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathcal{I})(\forall n \geq n_0)[\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon] \quad (\star)$$

- bodová: n_0 záleží na x
- stejnoměrná: n_0 nezávisí na x
- Názorný význam stejnoměrné konvergence:

  grafy $f_n(x)$ leží v ε-pásku kolem grafu $f(x)$ pro $n \geq n_0$.

Věta 4.1 (<u>Sigma en.</u>) Označme $\sigma_n = \sup_{x\in\mathcal{I}} |f_n(x) - f(x)|$. Potom je ekvivalentní:

1. $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ v $\mathcal{I}$
2. $\sigma_n \to 0$

Důkaz věty 4.1
$\Rightarrow$: Nechť $\varepsilon > 0$ dáno: užiji $(\star)$ s $\frac{\varepsilon}{2} > 0$:

$\exists n_0 \in \mathbb{N}$: $\forall x \in \mathcal{I}$, $\forall n \geq n_0$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \Big/ \sup_{x \in \mathcal{I}}$$

Potom

$$0 \leq \sigma_n \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

$\Leftarrow$: chci $(\star)$: $\varepsilon > 0$ dáno: $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\sigma_n < \varepsilon$ pro všechna $n \geq n_0$.

Zřejmě tedy

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \sigma_n \text{ pro všechna } \ x \in \mathcal{I},$$

tzn:

$$(\forall x \in \mathcal{I})(\forall n \geq n_0)[\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon]$$

$\square$

Definice 4.3 (<u>Lokální stejnoměrná konvergence.</u>) Řekneme, že $f_n(x)$ <u>konvergují</u> k $f(x)$ <u>lokálně stejnoměrně</u> v $\mathcal{I}$, jestliže

$$(\forall x \in I)(\exists \delta > 0)\Big[f_n(x) \rightrightarrows f(x) \text{ v } \mathcal{U}(x, \delta) \cap \mathcal{I}\Big]$$

Značíme: $f_n(x) \overset{loc}{\rightrightarrows} f(x)$ v $\mathcal{I}$.

Poznámka 4.4
• $f_n(x) \to f(x)$ bodově v I právě když

$$(\forall x \in I)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in N)(\forall n \geq n_0)\Big[|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\Big].$$

• stejnoměrná konvergenci se přenáší na menší množinu:
$f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ v I, kde $I \supset J$ implikuje $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ v J
• $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ v I implikuje $f_n(x) \overset{loc}{\rightrightarrows} f(x)$ v I (opačná implikace nikoliv)

Příklad `4.2`

1. `Zadání:` $f_n(x) = \texttt{arctg}\ (nx) \quad \to \quad f(x) = \frac{\pi}{2}\texttt{sgn}\ (x)$, $x \in \mathbb{R}$

   `Jak to vypadá se stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergencí?`

   `BÚNO` $x \geq 0$

- Tvrdím: $f_n \not\rightrightarrows f$ v $[0;\infty)$.

  Počítejme
  $$\sigma_n = \sup_{x\in[0;\infty)} |f_n(x) - f(x)|$$
  Označme
  $$h_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \frac{\pi}{2} - \texttt{arctg}\ (nx) & x > 0 \end{cases}$$
  Tedy
  $$\sigma_n = \sup_{x\in[0;\infty)} h_n(x) = \frac{\pi}{2} \not\to 0$$
  Dle Věty 4.1 není konvergence stejnoměrná
- Tvrdím: $f_n \not\rightrightarrows f$ v $(0;\infty)$.

  Počítejme
  $$\sigma_n = \sup_{x>0} h_n(x) = \frac{\pi}{2} \not\to 0$$
- Zvolme $\eta > 0$. Pak $f_n \rightrightarrows f$ na $[\eta, \infty)$. Tedy
  $$\sigma_n = \sup_{x\geq\eta} h_n(\eta) = \frac{\pi}{2} - \texttt{arctg}\ (n\eta) \to 0$$
- Tvrdím $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ v $(0,\infty)$.

  Nechť $x \in (0,\infty)$ dáno: potom $\delta = \frac{x}{2}$, užiji bod 3) s $\eta = \frac{x}{4}$:

  $f_n \rightrightarrows f$ na $[\eta,\infty)$ $\Rightarrow$ $f_n \rightrightarrows f$ na $\mathcal{U}(x,\delta) \cap (0,\infty)$

2. Zadání: $f_n(x) = \frac{n^2x}{1+n^3x^3} \quad\to\quad 0$ v $[0,1]$.

   Platí $|f_n(x) - 0| = f_n(x)$.

   - $f_n \not\rightrightarrows 0$ v $[0,1]$.

     Tedy
     $$\sigma_n = \sup_{x\in[0,1]} f_n(x)\Big|_{\text{spojitá funkce na kompaktu}} = \max_{x\in[0,1]} f_n(x)$$
     <u>podezřelé body:</u>

     (a) $x = 0:\ \ f_n(0) = 0$
     $x = 1:\ \ f_n(1) = \frac{n^2}{1+n^3} \quad\to\quad 0$

     (b)
     $$\begin{array}{lcl} f_n'(x) & = & \frac{n^2(1+n^3)-3n^3x^2(n^2x)}{(1+n^3)^2} \\ f_n'(x) = 0 & \Leftrightarrow & n^2(1+n^3) = 3n^2x^3n^3 \\ 1 & = & 2n^3x^3 \\ & & x = x_n = \frac{1}{n\sqrt[3]{2}} \end{array}$$

Tedy
$$f_n(x_n) = \frac{\frac{n}{\sqrt[3]{2}}}{1+\frac{1}{2}},$$
odkud
$$\sigma_n = \max\{\frac{n^2}{1+n^3}, \frac{\frac{n}{\sqrt[3]{2}}}{1+\frac{1}{2}}\} \quad \to \quad \infty$$

- `Tvrdím:` $f_n \not\rightrightarrows f$ `na žádném` $[0,\delta)$.

  `Nechť` $x_n \to 0$, $x_n > 0$, $f(x_n) \to \infty$. `Potom`
  $$\sigma_n = \sup_{x\in[0,\delta]} f_n(x) \underbrace{\geq}_{x_n\in[0,\delta)\ldots \texttt{ platí pro } n\geq n_0} f_n(x_n) \to +\infty$$

- `Tvrdím:` $f_n \rightrightarrows f$ `na` $[\eta,1]$, `kde` $\eta\in(0,1)$ `pevné.`

  `Pro` $n \geq n_0$: $x_n < \eta$, `odkud` $f_n'(x) < 0$ `na` $(\eta,1)$, `potom`
  $$\sigma_n = \max_{x\in[\eta,1]} f_n(x) = f_n(\eta) \quad \to \quad 0.$$

- $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ `na` $(0,1]$.

  `Nechť je` $x\in(0,1]$ `dáno. Nechť` $\delta = \frac{x}{2}$, $\eta = \frac{x}{4}$, `potom`
  $$\mathcal{U}(x,\delta)\cap[0,1] \subset [\eta,1]$$

Poznámka 4.5 1. semestr: $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ je ekvivalentní

1. $\exists a\in\mathbb{R}$ tak, že $a_n \to 0$
2. B.-C. podmínka:
$$(\forall\varepsilon>0)(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall m,n\geq n_0)[\ |a_m - a_n| < \varepsilon]$$

Věta 4.2 (<u>B. C. podmínka stejnoměrné konvergence.</u>) Funkce $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ v $\mathcal{I}$, právě když

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathcal{I})(\forall m, n \geq n_0)\Big[\ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon\Big]$$

Důkaz věty 4.2
(1) $\Rightarrow$ (2): Nechť je $\varepsilon > 0$ dáno. Víme, že $f_n \rightrightarrows f$:

$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathcal{I})(\forall n \geq n_0)$

$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$

a také $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathcal{I})(\forall m \geq n_0)$

$|f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$

a potom
$$\underbrace{|f_n(x) - f_m(x)|}_{\pm f(x)} \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon$$

(2) $\Rightarrow$ (1): Nechť $x \in \mathcal{I}$ je pevné:

Pak platí

$$(2) \ \Rightarrow \ (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathcal{I})(\forall m, n \geq n_0)\Big[\ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon\Big],$$

tedy posloupnost $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ je cauchyovská (splňuje B.-C. podmínku)

1. semestr: $\exists$ konečná limita $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$, označme ji $f(x)$.

Vidím: $f_n(x) \to f(x)$ v $\mathcal{I}$.

$\varepsilon > 0$ dáno: užiji (2) s $\frac{\varepsilon}{2}$:

$$(\exists n_0)(\forall m, n \geq n_0)(\forall x \in \mathcal{I})[\ |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}|]$$

Trik: n nechám, m pošlu do $+\infty$. Potom

$$[\ |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon]$$

$\square$

Poznámka 4.6 Bolzano ($\sim$ 1830):

$$\ldots f_n(x) \in \mathcal{C}(\mathcal{I}),\ f_n(x) \to f(x) \text{ v } \mathcal{I} \ \Rightarrow\ f(x) \in \mathcal{C}(\mathcal{I})$$

... chybný závěr

Věta 4.3 (<u>MOORE-OSGOODOVA VĚTA.</u>) Nechť $f_n(x)$, $f(x) : (a,b) \to \mathbb{R}$ jsou dány. Nechť
(1) $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ v (a,b)
(2) $\forall n \in \mathbb{N}$ existuje vlastní $\lim_{x\to b-} f_n(x)$ (označme ji c_n)
Potom:
(a) existuje vlastní $\lim_{n\to\infty} c_n$ (označme ji c)
(b) $\lim_{x\to b-} f(x) = c$

Důkaz věty 4.3 (a): Posloupnost $\{c_n\}$ splňuje B.-C. podmínku. Nechť $\varepsilon > 0$. Potom $f_n \rightrightarrows f$ v (a,b) : pak platí B.-C. podmínka pro stejnoměrnou konvergenci.

$\varepsilon > 0$ dáno:

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathcal{I})(\forall m,n \geq n_0)\Big[\ |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\Big]$$

Pošlu $x \to b-$: $\lim_{x\to b-}$: potom $|c_n - c_m| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

(b): chci:

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)[x \in \mathcal{P}_-(b,\delta)\ \Rightarrow\ |f(x) - c| < \varepsilon]$$

Tedy: $\varepsilon > 0$ dáno: víme: $f_n \rightrightarrows f$ v (a,b):

potom $\exists N \in \mathbb{N}$ takové, že $|f_N(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ pro všechna $x \in (a,b)$.

Dále: BÚNO: N tak velké, že $|c_N - c| < \frac{\varepsilon}{3}$

Nyní užiji $f_N(x) \to c_N$ pro $x \to b-$.

Tedy $(\exists\delta > 0)$ tak, že pro všechna $x \in \mathcal{P}_-(b,\delta) \Rightarrow |f_n(x) - c_N| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Nechť $x \in \mathcal{P} - (b,\delta)$, potom (trik):

$$|f(x) - c| \leq \underbrace{|f(x) - f_N|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_N(x) - c_N|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|c_N - c|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} < \varepsilon$$

□

Poznámka 4.7 Věta 4.3. v podstatě hovoří o záměně limit:

$$\lim_{x\to b-}\Big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big) = \lim_{n\to\infty}\Big(\lim_{x\to b-} f_n(x)\Big)$$

Věta 4.4 (<u>Zachování spojitosti při stejnoměrné konvergenci.</u>) Nechť $f_n(x) \in \mathcal{C}(\mathcal{I})$, kde $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ je libovolný interval. Nechť $f_n(x) \overset{loc}{\rightrightarrows} f(x)$ v $\mathcal{I}$. Potom $f(x) \in \mathcal{C}(\mathcal{I})$.

Důkaz věty 4.4 Dokáži: $x_0 \in \mathcal{I}$ není levý kraj $\mathcal{I} \Rightarrow f(x)$ spojitá v x_0 zleva

Z předpokladů: $\exists \delta > 0,\ f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ na $\mathcal{U}(x_0, \delta) \cap \mathcal{I}$

x_0 není levý kraj: BÚNO δ tak malé, že $(x_0 - \delta, x_0] \subset \mathcal{I}$.

Moore - Osgood, kde $(a, b) = (x_0 - \delta, x_0)$.

(a) OK

(b) chci $\exists \lim_{x \to x_0-} f_n(x) = f_n(x_0)$ - spojitost $f_n(x)$ v x_0-:

Moore - Osgood:

(a) $\{f_n(x_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ má limitu, ale už vím $c_n = f_n(x_0) \to f(x_0) = c$.

(b) $\lim_{x \to x_0-} f(x) = c = f(x_0)$.

$\square$

Poznámka 4.8

- $f(x) \in \mathcal{C}(\mathcal{I})$ značí:

  $f(x)$ je spojitá v $\mathcal{I}$, což je právě když:

  > $f(x)$ je spojitá zleva v každém $x_0 \in \mathcal{I}$, které není levý krajní bod $\mathcal{I}$, a zároveň
  >
  > $f(x)$ je spojitá zprava v každém $x_0 \in \mathcal{I}$, které není pravý krajní bod $\mathcal{I}$.

- Spojitost se zachová samozřejmě též při stejnoměrné konvergenci v celém $\mathcal{I}$. Bodová konvergence obecně nestačí

- $\mathcal{C}\Big([a, b]\Big) = \{f(x) : [a, b] \to \mathbb{R}\}$ je normovaný prostor:

  $$\|f\|_{\mathcal{C}\left([a,b]\right)} = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|\,.$$

  Zřejmě: $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ v $\mathcal{I}$ právě když $f_n \to f$ v normě $\mathcal{C}\Big([a, b]\Big)$.

- Prostor $\mathcal{C}\Big([a, b]\Big)$ je úplný.

Věta 4.5 (Záměna limity a integrálu při stejnoměrné konvergenci.) Nechť $f_n(x)$, $f(x) \in \mathcal{C}\Big([a,b]\Big)$, kde $[a,b]$ je omezený uzavřený interval. Nechť $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ v $[a,b]$. Potom

$$\int_a^b f_n(x) \ \mathsf{d}x \to \int_a^b f(x) \ \mathsf{d}x$$

neboli

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \int_a^b f_n(x) \ \mathsf{d}x \right\} = \int_a^b \left\{ \lim_{n\to\infty} f_n(x) \right\} \ \mathsf{d}x$$

Důkaz věty 4.5 Úvaha:

$$-|h(x)| \le h(x) \le |h(x)| \quad \Big/ \int_a^b \ \mathrm{d}x$$

Po integraci:

$$-\int_a^b |h(x)| \ \mathrm{d}x \le \int_a^b h(x) \ \mathrm{d}x \le \int_a^b |h(x)| \ \mathrm{d}x$$

Odtud plyne vztah

$$\Big| \int_a^b h(x) \ \mathrm{d}x \Big| \le \int_a^b |h(x)| \ \mathrm{d}x$$

Tedy píšu:

$$\Big| \int_a^b f_n(x) \ \mathrm{d}x - \int_a^b f(x) \ \mathrm{d}x \Big| = \Big| \int_a^b \Big(f_n(x) - f(x) \Big) \ \mathrm{d}x \Big| \le \int_a^b |\underbrace{f_n(x) - f(x)}_{\le \sigma_n \text{ z V.4.1}}| \ \mathrm{d}x \le (\underbrace{b-a}_{=L})\sigma_n \ \to 0,$$

kde

$$\sigma_n = \|f_n - f\|_{\mathcal{C}\left([a,b]\right)} = \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \to 0$$

□

Poznámka 4.9

- Předpoklad omezenosti intervalu je podstatný.
- Ukázali jsme, že zobrazení z $\mathcal{C}\Big([a,b]\Big)$ do $\mathbb{R}$

$$f \mapsto \int_a^b f(x) \ \mathrm{d}x$$

je spojité, dokonce Lipschitzovské.

Lemma 4.1 (O konečném podpokrytí.) Nechť $K \subset \mathbb{R}$ je kompaktní. Nechť $\{M_\alpha\}_{\alpha\in A}$ je systém otevřených množin, pokrývající K, tj.

$$K \subset \bigcup_{\alpha\in A} M_\alpha \, .$$

Potom lze najít konečný podsystém $\{M_{\alpha_i}\}_{i=1}^n$, též pokrývající K.

Důkaz lemmatu 4.1 <u>KROK 1.:</u> Vyberu spočetné podpokrytí.

Uvažuji intervaly $\mathcal{I} = (a, b)$, kde $a, b \in \mathbb{Q}$.

OTÁZKA:Je jich spočetně?

Vím, že je jich nekonečně mnoho, ale je jich méně než $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \approx \mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$.

Očísluji je: $\{\mathcal{I}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a provedu třídění:

$$\mathcal{I}_n \begin{cases} a) \text{ Existuje } M_\alpha \text{ tak, že } \mathcal{I}_n \subset M_\alpha \ldots \text{ jedno takové } M_\alpha \text{ vyberu a označím ho } M_{\alpha_n} \\ b) \ \mathcal{I}_n \text{ není částí žádného } M_\alpha, \text{ tak ho vyhodím} \end{cases},$$

po třídění značím stejně.

<u>KLÍČOVÉ POZOROVÁNÍ:</u> Platí: $\{\mathcal{I}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a potažmo také $M_{\alpha_n} \supset \mathcal{I}_n$ pokrývají K, neboť $x \in K$ libovolně: $\exists M_{\tilde{\alpha}} \ni x$ tak, že

$$M_{\tilde{\alpha}} \text{ otevřená: } \exists \delta > 0 : \ x \in (x - \delta, x + \delta) \subset M_{\tilde{\alpha}}$$

a tedy

$$\exists a, b \in \mathbb{Q} : x \in (a, b) \subset (x - \delta, x + \delta) \subset M_{\tilde{\alpha}},$$

tedy interval (a, b) nevyřadím: např. $M_{\tilde{\alpha}} \supset (a, b)$.

<u>KROK 2.:</u> Je jich konečně mnoho.

Tvrdím:

$$\exists N \in \mathbb{N} : \quad K \subset \bigcup_{n=1}^{N} M_{\alpha_n}$$

Důkaz tvrzení sporem:

$$A_N = K \setminus \bigcup_{n=1}^{N} M_{\alpha_n} \neq \emptyset \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

Zvol posloupnost

$$\{x_N\} \subset K : \quad x_N \in A_N \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

Tvrdím: $\{x_N\}$ nemá hromadný bod v K.

Sporem: Nechť $x_0 \in K$ je hromadný bod. Potom

$$\exists N_0 \in \mathbb{N} : x_0 \in M_{\alpha_{N_0}} \text{ otevřené} \quad \Rightarrow \quad \exists \delta > 0 : \ \mathcal{U}(x_0, \delta) \subset M_{\alpha_{N_0}}$$

Ovšem: $N > N_0 \quad \Rightarrow \quad A_N$ disjunktní s $M_{\alpha_{N_0}}$, tudíž i s okolím $\mathcal{U}(x_0, \delta)$, tedy $x_N \notin \mathcal{U}(x_0, \delta)$ pro $N > N_0$

SPOR

□

Poznámka 4.10
• Tvrzení lze obrátit: má-li každé otevřené pokrytí K konečné podpokrytí, je množina K kompaktní.
• Takovéto ekvivalentní vyjádření kompaktnosti platí ve všech metrických prostorech.
• Kompaktní množina je v jistém smyslu konečná.
• Je jedno, zda otevřenost M_α chápeme vůči $\mathbb{R}$ nebo vůči K.

Lemma 4.2 (<u>Charakterizace lokálně stejnoměrné konvergence.</u>) Nechť $f_n(x)$, $f(x) : I \to \mathbb{R}$, kde $\mathcal{I}$ je otevřený interval. Potom je ekvivalentní:

(1) $f_n(x) \overset{loc}{\rightrightarrows} f(x)$ v $\mathcal{I}$.

(2) $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ v každém kompaktním intervalu $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$.

Důkaz lemmatu 4.2
• (2) $\Rightarrow$ (1)

Je dáno $x \in (a, b)$. Ptáme se, existuje-li $\delta > 0$ tak, že $f_n \rightrightarrows f$ na $\mathcal{U}(x, \delta)$.

Nechť (a, b) je otevřený interval, potom existuje $\delta > 0$ tak, že $(x - 2\delta, x + 2\delta) \subset (a, b)$

Potom $\mathcal{J} = [x - \delta, x + \delta] \subset (a, b)$ je kompakt, tedy $f_n \rightrightarrows f$ na $\mathcal{J}$, tím spíše na $\mathcal{U}(x, \delta) = (x - \delta, x + \delta)$
• (1) $\Rightarrow$ (2)

Je dán kompakt $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$. Nechť $x \in \mathcal{J}$, pak $\exists \delta = \delta_x : f_n \rightrightarrows f$ na $\mathcal{U}(x, \delta_x)$, tedy $J \subset \bigcup_{x \in \mathcal{J}} \mathcal{U}(x_i, \delta_{x_i})$ otevřené pokrytí $\mathcal{J}$.

Z Lemmatu 4.1: existuje konečné podpokrytí

$$J \subset \bigcup_{i=1}^{N} \mathcal{U}(x_i, \delta_{x_i})$$

Nechť je $\varepsilon > 0$ dáno. Potom extistuje n_i tak, že $\forall n \geq n_i$: $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ ($\diamondsuit$) $\forall x \in \mathcal{U}(x_i, \delta_{x_i})$.

Položme $n_0 = \max\{n_i, i = 1, \ldots, N\}$.

Potom $x \in \mathcal{J}$, $n \geq n_0$, a tak $x \in \mathcal{U}(x_i, \delta_{x_i})$ pro vhodné $i = \{1, \ldots, N\}$

Z ($\diamondsuit$) potom plyne $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

□

Poznámka 4.11 Poslední část důkazu (od $\varepsilon > 0$ dáno...):

konvergence sejnoměrná na $M_i \Rightarrow$ konvergence stejnoměrná na $\bigcup_{i=1}^{N} M_i$

pouze pro KONEČNÁ sjednocení

Věta 4.6 (<u>DINIHO VĚTA.</u>) Nechť $f_n(x)$, $f(x) \in \mathcal{C}\Big([a,b]\Big)$, kde $[a,b]$ je omezený uzavřený interval. Nechť $f_n(x) \to f(x)$ v $[a,b]$ a nechť pro pevné $x \in [a,b]$ je posloupnost $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ monotónní. Potom $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ v $\mathcal{I}$.

Poznámka 4.12 Bod 3 - monotonie je podstatný. Předpoklad monotonie lze oslabit:

$$\Big(\exists n_0 \in \mathbb{N}\Big)\Big(\forall x \in \mathcal{I}\Big)\Big(\{f_n(x)\}_{n\geq n_0} \text{ je monotónní vůči } n\Big),$$

tedy n_0 nezávisí na x.

Viz např. $x \in [-K,K] \ldots \ f_n(1+\frac{x}{n})^n$ je monotónní?

Potřebuji $|\frac{x}{n}| < \delta$ stačí $n \geq n_0 = \frac{K}{\delta}$

Důkaz věty 4.6 Nechť je $\varepsilon > 0$ dáno, zvolme $x \in \mathcal{I}$ pevné. Potom existuje $n_0 = n_0(x)$ tak, že $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ pro všechna $n \geq n_0(x)$.

<u>SPECIÁLNĚ:</u> nechť $|f_{n_0(x)}(x) - f(x)| < \varepsilon$, spojitost: $f(x)$, $f_{n_0(x)}(x)$ spojité v $\mathcal{I}$. Tedy existuje $\delta = \delta(x)$, $n_0(x) = \delta(x)$ tak, že

$$|f_{n_0(x)}(\xi) - f(\xi)| < \varepsilon \quad \text{pro} \quad \forall \xi \in \mathcal{U}\left(x, \delta(x)\right) \cap \mathcal{I}$$

<u>KLÍČOVÉ POZOROVÁNÍ:</u>

1) $f_n(x) \to f(x)$

2) $\{f_n(x)\}_n$ monotónní

Z 1) a 2) plyne: $|f_n(x) - f(x)|$ se s rostoucím n zmenšuje (nemůže se zvětšovat)

$$\Rightarrow (\clubsuit) \quad |f_{n_0(x)}(\xi) - f(\xi)| < \varepsilon \quad \forall \xi \in \mathcal{U}\left(x, \delta(x)\right), \quad \forall n \geq n_0(x)$$

Nyní: $\mathcal{I} = [a,b] \subset \bigcup_{x\in[a,b]} \underbrace{\mathcal{U}\left(x, \delta(x)\right) \cap \mathcal{I}}_{\text{otevřené pokrytí}}$

V pokrytí i uzavřená množina: $[a, a+\delta)$ otevřená v $\mathcal{I}$, můžu ji nahradit $(-\infty, a+\delta)$

<u>Dle L.4.1:</u> Existují $x_1, \ldots, x_N$ tak, že

$$\bigcup_{i=1}^{N} \mathcal{U}\Big(x_i, \delta(x_i)\Big) \supset \mathcal{I}$$

Položme $n_0 := \{n_0(x_1), n_0(x_2), \ldots, n_0(x_N)\}$

Tvrdím

$$x \in \mathcal{I}, n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Pokud $x \in \mathcal{I} \Rightarrow x \in \mathcal{U}(x_i, \delta(x_i))$ pro vhodné $i \in \{1, \dots, N\}$, protože $n \geq n_0 \geq n_0(x_i)$, pak dle (♣) platí $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

$\square$

Příklad 4.3 Nechť
$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \to \mathrm{e}^x \text{ v } \mathbb{R}$$
Omezme se na $\mathcal{I} = [-K, K]$, $K > 0$. Víme, že $f_n(x)$ i $f(x)$ jsou spojité v $\mathcal{I}$.

Pro $x = 0$ je $\{f_n(0)\}$ monotónní.

Pro $x \neq 0$ provedeme přepis:
$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \exp\left[x \frac{n}{x} \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right] = \exp\left[x \cdot \varphi\left(\frac{x}{n}\right)\right],$$
kde
$$\varphi(z) = \frac{\ln(1+z)}{z}$$
Tedy
$$\varphi(z) = 1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n+1},$$
kde jsme dodefinovali $\varphi(0) = 1$, a tedy $\varphi'(0) = -\frac{1}{2}$, dodefinovaná funkce $\varphi(z)$ je nekonečně hladká, tedy $\varphi'(0) < 0 \Rightarrow \varphi'(z) < 0$ na $\mathcal{U}(0, \delta)$,

$\Rightarrow$ $\varphi(z)$ je monotónní (klesající) na $\mathcal{U}(0, \delta)$

Je $\mathcal{I} = [-K, K]$ dáno: $x \in \mathcal{I}$, $|x| \leq K$

Tedy
$$\exists n_0 \in \mathbb{N}: \ n \geq n_0; \ \left|\frac{x}{n}\right| \leq \delta \quad (\text{polož } n_0 = \frac{K}{\delta}),$$
$$\text{potom } \frac{x}{n} \in \mathcal{U}(0, \delta) \quad \Rightarrow \quad \varphi\left(\frac{x}{n}\right) \text{ je monotónní vůči } n.$$
Tudíž $f_n \rightrightarrows \mathrm{e}^x$ v $(-k, k]$ dle Diniho věty.

<u>Závěrem:</u>
$$\sup_x \left|\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - \mathrm{e}^x\right| = ? \quad \text{(těžko řešitelné) např. derivováním.}$$

Definice 4.4
$$\bigcup_{\alpha \in A} M_\alpha := \left\{x : (\exists \alpha \in A)(x \in M_\alpha)\right\}$$

Poznámka 4.13

- $$f_n(x) \to f(x) \not\Rightarrow f_n'(x) \to f'(x),$$
  ale
  $$f_n(x) \to f(x) \overset{V.4.7}{\Leftarrow} f_n'(x) \to f'(x),$$
- dokonce
  $$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \not\Rightarrow f_n'(x) \to f'(x),$$
  např. $f_n(x) = \frac{\sin x}{x} \rightrightarrows 0$ v $\mathbb{R}$, neboť $|f_n(x) \leq \frac{1}{n}|$

  Přesto $f_n'(x) = \cos nx \not\to 0$ pro žádné $x \in \mathbb{R}$

Věta 4.7 (<u>Derivace člen po členu.</u>) Nechť $f_n(x)$ mají vlastní derivace všude v otevřeném intervalu (a,b). Nechť

(1) existuje $g(x) : (a,b) \to \mathbb{R}$ tak, že $f_n'(x) \overset{loc}{\rightrightarrows} g(x)$ v (a,b)
(2) existuje $x_0 \in (a,b)$ tak, že posloupnost $\{f_n(x_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ konverguje.

Potom

(a) existuje $f(x) : (a,b) \to \mathbb{R}$ tak, že $f_n(x) \overset{loc}{\rightrightarrows} f(x)$ v (a,b)
(b) $f'(x) = g(x)$ všude v (a,b)

Důkaz věty 4.7 L.4.2: Lokální stejnoměrnost $\Leftrightarrow$ stejnoměrná na kompaktních podintervalech.

Důkaz části (a): Nechť $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$ kompakt: Jestli existuje $f(x) : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ tak, že $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ v $[\alpha,\beta]$.

Ověřme B.-C. podmínku stejnoměrné konvergence $\{f_n(x)\}$ na $\mathcal{J} = [\alpha,\beta]$.

BÚNO $x_0 \in \mathcal{J}$. Pomocná funkce: $\gamma_{mn}(x) = f_m(x) - f_n(x) = h(x)$.

Nechť $x \in \mathcal{J}$ libovolné: Z Lagrangeovy věty: $h(x) = h(x_0) + h'(\xi)(x - x_0)$, kde $\xi \in \mathcal{J}$.

Zpět dosadím:

$$f_m(x) - f_n(x) = \underbrace{f_m(x_0) - f_n(x_0)}_{|\ldots|<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\Big[f_m'(\xi) - f_n'(\xi)\Big]}_{<\frac{\varepsilon}{2(\beta-\alpha)}} \cdot \underbrace{(x - x_0)}_{\leq(\beta-\alpha)}$$

Tedy $\{f_n(x_0)\}_n$ splňuje B.-C. podmínku:

$|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ pro $n \geq n_1$

Tedy $f_n'(x) \rightrightarrows g(x)$ na $\mathcal{J}$ ... B.-C. podmínka stejnoměrné konvergence:

$$|f_m'(\xi) - f_n'(\xi)| < \frac{\varepsilon}{2(\beta-\alpha)} \quad \text{pro} \quad n \geq n_2 \quad \forall \xi \in [\alpha,\beta]$$

Položme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, potom

$$\forall n \geq n_0 : |f_m(x) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

tedy

$$\forall n \geq n_0 : |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Tedy $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ v $\mathcal{J} \subset (a,b)$.

Potom $\mathcal{J}$ vyplní celé (a,b). Tedy $f(x) : (a,b) \to \mathbb{R}$ je definovaná.

Důkaz části (b): dokazuji $f'(x) = g(x)$ v $\mathcal{I}$.

Ukážu pro pevné $c \in (a,b)$: $f'_-(c) = g(c)$

Pomocná funkce: $h_n(t) = \frac{1}{t}[f_n(c+t) - f_n(c)]$

Pozorujeme:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\lim_{t\to 0-} h_n(t) \right) = \lim_{n\to\infty} (f_n)'(c) = g(c)$$

$$\lim_{t\to 0-} \left(\lim_{n\to\infty} h_n(t) \right) = \lim_{t\to 0-} \left(\frac{1}{t}[f(c+t) - f(c)] \right) = f'_-(c)$$

Nechť $h_n(t)$: $(-\delta, 0) \to \mathbb{R}$, kde δ je tak malé, aby $(c-\delta, c) \subset (a,b)$ a aby $f'_n \rightrightarrows g(x)$ na $(c-\delta, c)$

<u>Moore - Osgood:</u> Potřebuji

(1) $h_n(t) \rightrightarrows h(t)$ na $(-\delta, 0)$

(2) $\forall n \in N$ existuje vlastní limita $\lim_{t\to 0_-} h_n(t) = a_n$

Potom

(a) existuje vlastní limita $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

(b) $\lim_{t\to 0_-} h(t) = a$

Tedy víme: $h_n(t) \to h(t) = \frac{1}{t}[f(c+t) - f(c)]$.

(To, že $h_n \rightrightarrows h$ na $(-\delta, 0)$ ověřím později)

Nechť $a_n = h_n(0_-) = (f_n)'(c)$. Potom existuje $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (f_n)'(c) = g(c)$.

Klíčový závěr: $\lim_{t\to 0_-} h(t) = \underbrace{\lim_{t\to 0_-} \frac{1}{t}[f(c+t) - f(c)]}_{=f'_-(c)} = g(c)$

Zbývá: $h_n(t) \rightrightarrows h(t)$ v $(-\delta, 0)$

Cesta $|h_n(t) - h(t)|$ vede do slepé uličky ... $|f_n'(x) - f'(x)|$

Ověřím B.-C. podmínku stejnoměrné konvergence:

pomocná funkce

$$\gamma_{mn}(x) = f_m(x) - f_n(x)$$

Tvrdím:

$$h_n(t) - h_m(t) = \frac{1}{t}\Big[f_m(c+t) - f_n(c+t) - \Big(f_m(c) - f_n(c)\Big)\Big] = \frac{1}{t}\Big[\gamma_{mn}(c+t) - \gamma_{mn}(c)\Big] \overset{\text{Lagrange}}{=}$$
$$\overset{\text{Lagrange}}{=} \gamma_{mn}'(\xi) = f_m'(\xi) - f_n'(\xi), \quad \text{kde } \xi \in (c-\delta, c)$$

Tedy celkem: $t \in (-\delta, 0)$ libovolné: $\exists \xi \in (c-\delta, c)$:

$$|h_m(t) - h_n(t)| = |f_m'(\xi) - f_n'(\xi)| < \varepsilon \text{ pro } m, n \geq n_0, \quad n_0 \text{ nezávisí na } \xi$$

ale: $f_n'(x) \rightrightarrows g(x)$ na $(c-\delta, c)$

$\Rightarrow |h_m(t) - h_n(t)| < \varepsilon$ pro $m, n \geq n_0$, $t \in (-\delta, 0)$

$\square$

Věta 4.7 ' (INTEGRACE ČLEN PO ČLENU.) Nechť $g_n(x)$, $g(x) : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$, kde $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval. Nechť $f_n(x) = \int g_n(x)$ v $\mathcal{I}$. Nechť:

(1) $g_n(x) \overset{loc}{\rightrightarrows} g(x)$ v $\mathcal{I}$
(2) existuje $x_0 \in \mathcal{I}$ tak, že $\{f_n(x_0)\}$ konverguje.
Potom
(a) existuje $f(x) : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ tak, že $f_n(x) \overset{loc}{\rightrightarrows} f(x)$ v $\mathcal{I}$
(b) $f(x) = \int g(x)$ v $\mathcal{I}$.

Důkaz věty 4.7 ' Značení: $u(x) = \int u(x)\, dx$ v $\mathcal{I} \Leftrightarrow \exists u'(x)$ všude v $\mathcal{I}$ a rovná se $v(x)$.

$\square$

Poznámka 4.14 Protože $u(x) = \int v(x)$ v $\mathcal{I}$ je zkratka za: 'existuje vlastní $u'(x)$ v $\mathcal{I}$ a rovná se $v(x)$', říká Věta 4.7.' přesně totéž co Věta 4.7. (se značením $f_n'(x) = g(x)$).

Kapitola 4b

Stejnoměrná konvergence řad funkcí

Pojmy v této kapitole: Konvergence řady funkcí (absolutně bodová, absolutně lokálně stejnoměrná, absolutně stejnoměrná), stejně omezené funkce. Nutná podmínka stejnoměrné konvergence řady, B.C. podmínka stejnoměrné konvergence řady funkcí, Weierstrassova věta, Dirichletovo, Leibnizovo, Abelovo kritérium stejnoměrné konvergence řady, věta o zachování spojitosti při stejnoměrné konvergenci řady, věta o derivování řady člen po členu.

Definice 4.5 (Konvergence řady funkcí.) Nechť funkce $f_k(x) : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ jsou dány. Označme

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\,.$$

Existuje-li funkce $s(x) : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ taková, že $s_n(x) \to s(x)$ (resp. $s_n(x) \rightrightarrows s(x)$ resp. $s_n(x) \overset{loc}{\rightrightarrows} s(x)$) v $\mathcal{I}$, říkáme, že řada (funkcí)

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

konverguje bodově (resp. stejnoměrně resp. lokálně stejnoměrně) v $\mathcal{I}$.

Poznámka 4.15 Tj.: částečné součty konvergují bodově (resp. stejnoměrně resp. lokálně stejnoměrně) k součtu řady.

Věta 4.8 (Nutná podmínka stejnoměrné konvergence řady.) Jestliže řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje stejnoměrně v intervalu $\mathcal{I}$, pak $f_k(x) \rightrightarrows 0$ v $\mathcal{I}$.

Důkaz věty 4.8 Nechť $s_n(x) \rightrightarrows s(x)$ v $\mathcal{I}$. Také $s_{n-1}(x) \rightrightarrows s(x)$ v $\mathcal{I}$. Tedy

$$\Big(\exists n_0 \in \mathbb{N}\Big)\Big(\forall x \in \mathcal{I}\Big)\Big(\forall n \geq n_0\Big)\Big[\begin{array}{c} |s_n(x) - s(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \\ |s_{n-1}(x) - s(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \end{array}\Big]$$

Tedy

$$|f_n(x)| = |s_n(x) - s_{n-1}(x)| \leq |s_n(x) - s(x)| + |s_{n-1}(x) - s(x)| < \varepsilon$$

□

Poznámka 4.16

$$f_n \rightrightarrows f, \quad g_n \rightrightarrows g, \qquad \text{potom } f_n + g_n \rightrightarrows f + g$$

Příklad 4.4 Řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k x^k = \sum_{k=1}^{\infty} (2x)^k$$

konverguje $\Leftrightarrow$ $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Označme

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (2x)^k = \tfrac{2x-(2x)^n}{1-2x} \to \tfrac{2x}{1-2x} \qquad \text{v} \qquad \mathcal{I} = \Big(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\Big)$$
$$|s_n(x) - s(x)| = \tfrac{|2x|^n}{1-2x}$$

Pokud $\underbrace{x \in [-\frac{1}{2} + \eta, \frac{1}{2} - \eta]}_{0<\eta<\frac{1}{2}}$, potom $|s_n(x) - s(x)| \leq \frac{(1-2\eta)^n}{2\eta} \to 0$, kde $\begin{array}{l} x \leq \frac{1}{2} - \eta \\ -2x \geq -\frac{2}{2} + 2\eta \\ 1 - 2x \geq 2\eta \end{array}$

$\Rightarrow$ řada konverguje stejnoměrně na $[-\frac{1}{2} + \eta, \frac{1}{2} - \eta]$

$\Rightarrow$ řada konverguje lokálně stejnoměrně na $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

konvergence není stejnoměrná na pravém okolí bodu $-\frac{1}{2}$ a na levém okolí bodu $\frac{1}{2}$

Důkaz: pro $\mathcal{P}_+(-\frac{1}{2}, \delta) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} + \delta)$

sporem: nechť konverguje stejnoměrně dle V.4.8:

$$(2x)^k \rightrightarrows 0 \text{ na } (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} + \delta)$$

<u>Moore-Osgood:</u> $a_k = \lim_{x \to -\frac{1}{2}+} (2x)^k$, pak $\lim a_k$ existuje

Ale: $\lim_{x \to -\frac{1}{2}+} (2x)^k = (-1)^k$ nemá limitu pro $k \to +\infty$, což je SPOR.

Nyní pro $\mathcal{P}_-(+\frac{1}{2}, \delta)$: Nechť $(2x)^k \rightrightarrows 0$. Potom a) $\exists \lim_{k\to\infty} a_k = a$, kde $a_k = \lim_{x \to \frac{1}{2}-} f_k(x) = 1^k$

b) $a = \lim_{x \to \frac{1}{2}-} f(x) = 0$, neboť $f(x) = 0$ na $(\frac{1}{2} - \delta, \frac{1}{2})$.

Definice 4.6 Nechť funkce $f_k(x) : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ jsou dány. Jestliže řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|$$

konverguje bodově(resp. stejnoměrně resp. lokálně stejnoměrně) v $\mathcal{I}$, říkáme, že řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

<u>KONVERGUJE ABSOLUTNĚ BODOVĚ</u> (resp. <u>ABSOLUTNĚ STEJNOMĚRNĚ</u> resp. <u>LOKÁLNĚ</u> <u>ABSOLUTNĚ STEJNOMĚRNĚ</u>) v $\mathcal{I}$.

Příklad 4.5 Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin^2 x \cos^k x, \qquad x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right].$$

Platí

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sin^2 x \cos^k x = \sin^2 x \sum_{k=0}^{n} \cos^k x = \begin{cases} \sin^2 x \frac{1-\cos^{n+1}}{1-\cos x}, & x \neq \pi \\ 0, & x = \pi \end{cases}$$

$$\sigma_n(x) = \sum_{k=0}^{n} |\sin^2 x \cos^k x| = \sin^2 x \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\cos^k x}_{(-\cos x)^k = |\cos x|^k} = \begin{cases} \sin^2 x \frac{1-(-\cos^{n+1})}{1-(-\cos x}), & x \neq \pi \\ 0, & x = \pi \end{cases}$$

Víme, že $\cos x \leq 0$ pro $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. Dále

$$s_n(x) \to s(x) = \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} \text{ v } \mathcal{I}$$

$$\sigma_n(x) \to \sigma(x) = \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} \text{ v } \mathcal{I} \setminus \{\pi\}, \quad \sigma(x) = 0 \text{ pro } x = \pi$$

Jak to vypadá se stejnoměrnou konvergencí?

$$|s_n(x) - s(x)| = \left| \sin^2 x \frac{\cos^{n-1} x}{1 - \cos x} \right|$$

$$\begin{aligned} 1 - \cos x \quad &\geq 1 && \text{v } \mathcal{I} \\ &\leq |\sin^2 x \cos^{n+1} x| && \text{v } \mathcal{I} \end{aligned}$$

Otázka: platí $h_n(x) = \sin^2 x(\cos^{n+1}) \rightrightarrows 0$ v $\mathcal{I}$?

extrémy $h_n(x)$:

a) krajní body $h_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = h_n\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$

b)

$$\begin{aligned} h_n'(x) &= [\cos^{n+1} x - \cos^{n+3} x]' = -\sin x[(n+1)\cos^n x - (n+3)\cos^{n+2}] = \\ &= -\sin x \cos^n x[(n+1) - (n+3)\cos^2 x] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rll} (i) & \sin x = 0 & x = \pi \\ (ii) & \cos x = 0 & x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \text{ neleží uvnitř} \\ (iii) & \cos^2 x = \frac{n+1}{n+3} & \end{array}$$

$$|h_n(x_1)| = (1 - \cos^2 x_1)(\cos^{n+1} x_1) \leq \underbrace{\left(1 - \frac{n+1}{n+3}\right)}_{\to 0}$$

Závěr:

- Řada konverguje stejnoměrně v $\mathcal{I}$.
- Řada konverguje bodově absolutně v $\mathcal{I}$.
- Řada nekonverguje absolutně stejnoměrně v $\mathcal{I}$.

Sporem: $\sigma_n(x) \rightrightarrows \sigma(x)$

$\sigma_n(x)$ spojité $\Rightarrow$ $\sigma(x)$ spojitá. Platí

$$\lim_{x\to\pi} \sigma(x) = \lim_{x\to\pi} \frac{\sin^2 x}{1+\cos x} = \lim_{x\to\pi}(1 - \cos x) = 2 \neq 0 = \sigma(\pi).$$

Věta 4.9 (<u>B.C. podmínka stejnoměrné konvergence řady funkcí.</u>) Nechť funkce $f_k(x) : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ jsou dány. Pak je ekvivalentní:
(1) řada funkcí $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje stejnoměrně v $\mathcal{I}$
(2) platí:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathcal{I})(\forall n \geq n_0)(\forall p \in \mathbb{N}) \left[\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| < \varepsilon \right]$$

Důkaz věty 4.9 (1) $\Leftrightarrow$ (2):

$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ konverguje stejnoměrně v $\mathcal{I} \Leftrightarrow \{s_n(x)\}$ splňuje B.C. podmínku pro stejnoměrnou konvergenci:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathcal{I})(\forall m, n \geq n_0) \quad [\underbrace{|s_m(x) - s_n(x)}_{(\spadesuit)}| < \varepsilon]$$

BÚNO $m > n$, označ $p = m - n$.

Pozorování: $(\spadesuit) = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right|$

□

Věta 4.10 Nechť řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje absolutně stejnoměrně v $\mathcal{I}$. Pak konverguje stejnoměrně v $\mathcal{I}$.

Důkaz věty 4.10 Řada konverguje absolutně stejnoměrně $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|$ splňuje B.C. podmínku stejnoměrné konvergence:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathcal{I})(\forall n \geq n_0) \quad \Big[\Big| \sum_{k=n+1}^{n+p} |f_k(x)| \Big| < \varepsilon \Big]$$

trojúhelníková nerovnost:

$$\Big| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \Big| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |f_k(x)|$$

$\Rightarrow$ B.C. podmínka pro $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ tj. bod (2) V.4.9

□

Věta 4.11 (<u>Weierstrassova.</u>) Nechť funkce $f_k(x) : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ jsou dány. Nechť a_k jsou čísla taková, že

(1) $|f_k(x)| \leq a_k$ pro každé $x \in \mathcal{I}$,

(2) řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje.

Potom řada funkcí $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje absolutně stejnoměrně v $\mathcal{I}$.

Důkaz věty 4.11 Ověř B.C. podmínku stejnoměrné konvergence řady $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|$.

Nechť je $\varepsilon > 0$ dáno. Potom řada $\sum a_k$ konverguje $\Rightarrow$ splní B.C. podmínku konvergence pro řady:

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall p \in \mathbb{N}) \quad \Big[\sum_{k=n+1}^{n+p} |f_k(x)| \underset{\text{z (1)}}{\leq} \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon \Big]$$

□

Příklad 4.6 Vyšetřete řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{x}{x^2+k^4}\right).$$

Platí $|\sin x| \leq |z| \quad \forall z \in \mathbb{R}$, tedy

$$\Big| \sin\Big(\frac{x}{x^2+k^4}\Big) \Big| \leq \frac{|x|}{x^2+k^4} \leq \frac{|x|}{k^4}.$$

Tedy

1. $x \in \mathcal{I} = [-K, K]$, $K > 0$ pevné, a tedy $f_k(x) \leq \frac{K}{k^4}$. Tedy $\sum \frac{K}{k^4}$ konverguje $\Rightarrow$ V.4.11: řada konverguje absolutně stejnoměrně v $\mathcal{I}$

   $\Rightarrow$ řada konverguje lokálně absolutně stejnoměrně v $\mathbb{R}$

2. platí víc: řada konverguje stejnoměrně v $\mathbb{R}$: užiji

$$\left|\frac{ab}{a^2+b^2}\right| \leq \frac{1}{2} \qquad a = |x|, b = k^2$$

   Potom

$$|f_k(x)| \leq \frac{|x|k^2}{|x|^2+k^4} \cdot \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{2k^2}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2} \quad \text{konverguje.}$$

Poznámka 4.17 Abelovo sumační lemma: nechť $\alpha_k \in \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$, nechť $\beta_k \in \mathbb{R}$ jsou taková, že
(1) $(\exists M \geq 0)(\forall p \in \mathbb{N})[|\sum_{k=1}^{p} \alpha_k| \leq M]$
(2) $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \beta_3 \geq \cdots \geq \beta_k \cdots \geq 0$
Potom $|\sum_{k=1}^{p} \alpha_k \beta_k| \leq M\beta_1$ platí $\forall p \in \mathbb{N}$.

Definice 4.7 Řekneme, že funkce $f_n(x) : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ jsou STEJNĚ OMEZENÉ v $\mathcal{I}$, pokud

$$(\exists M \geq 0)(\forall x \in \mathcal{I})(\forall n \in \mathbb{N})[|f_n(x)| \leq M]$$

Věta 4.12 (DIRICHLETOVO KRITÉRIUM STEJNOMĚRNÉ KONVERGENCE ŘADY.)
Nechť $f_k(x)$, $g_k(x) : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ jsou dány. Nechť
(1) částečné součty $\sum_{k=1}^{n} g_k(x)$ jsou stejně omezené v $\mathcal{I}$
(2) $f_1(x) \geq f_2(x) \geq \cdots \geq f_k(x) \geq \cdots \geq 0$ platí $\forall x \in \mathcal{I}$, $\forall k \in \mathbb{N}$
a
(3) $f_k(x) \rightrightarrows 0$ v $\mathcal{I}$.
Potom řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) g_k(x)$ konverguje stejnoměrně v $\mathcal{I}$.

Poznámka 4.18 Dirichlet pro řady čísel (minulý semestr): Řada $\sum_k a_k$ má omezené částečné součty a $b_k \to 0$ monotónně, pak řada $\sum_k a_k b_k$ konveguje.

Důkaz věty 4.12 (1):

$$\left|\sum_{k=1}^{n} g_k(x)\right| \leq M \quad \text{nezávisle na } x,\ n$$

Tedy

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} g_k(x)\right| = \left|\sum_{k=1}^{n+p} g_k(x) - \sum_{k=1}^{n} g_k(x)\right| \leq \underbrace{\left|\sum_{k=1}^{n+p} g_k(x)\right|}_{\leq M} + \underbrace{\left|\sum_{k=1}^{n} g_k(x)\right|}_{\leq M} \leq 2M \quad \text{nezávisle na } x,\ n,\ p$$

Ověřme B.C. podmínku stejnoměrné konvergence pro $\sum f_k(x) g_k(x)$.

Nechť je $\varepsilon > 0$ dáno: potom dle (3)

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathcal{I})(\forall k > n_0)\Big[|f_k(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2M}\Big]$$

Nyní nechť $x \in \mathcal{I}$, $n \geq n_0$, $p \in \mathbb{N}$ jsou libovolné. Potom

$$\Big|\sum_{k=n+1}^{n+p} g_k(x) f_k(x)\Big| \leq 2M \cdot f_{n+1}(x) < \frac{2M\varepsilon}{2M} = \varepsilon.$$

<u>Abellovo lemma:</u> $\alpha_k = g_k(x)$, $\beta_k = f_k(x)$ $(\dots$ viz (2)), rozdíl $k = n+1, \dots, n+p$.

□

Poznámka 4.19

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} \cos(kx)\Big| \leq \frac{2}{|\sin\frac{x}{2}|} \quad \forall x \neq 2k\pi$$

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} \sin(kx)\Big| \leq \frac{2}{|\sin\frac{x}{2}|} \quad \forall x \neq 2k\pi$$

Příklad 4.7 `Vyšetřete konvergenci řady`

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}.$$

`Pro nás bude platit` $g_k(x) = \sin kx$, $f_k(x) = \frac{1}{k} \rightrightarrows 0$ `v` $\mathbb{R}$ `monotónně. Dle předchozí poznámky platí`

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} g_k(x)\Big| \leq \frac{2}{|\sin\frac{\delta}{2}|} \qquad \texttt{pro } x \in [\delta, 2\pi - \delta] = \mathcal{I}_\delta$$

`Závěry:`

1. `řada konverguje stejnoměrně v` $\mathcal{I}_\delta$
2. `řada konverguje lokálně stejnoměrně v` $(0, 2\pi)$

   `ale: konvergence není stejnoměrná na žádném` $\mathcal{P}_+(0,\delta)$

<u>`Pomocný výpočet:`</u> $N \in \mathbb{N}$ `pevné,` $x = \frac{\pi}{4N}$`. Potom`

$$\sum_{k=N+1}^{2N} \frac{\sin kx}{k} \geq \underbrace{N}_{\texttt{počet sčítanců}} \frac{1}{2N}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

`Odhady:`

$$\frac{1}{2N} \leq \frac{1}{k} \leq \frac{1}{N+1}$$

$$\frac{\pi}{4} \leq \frac{(N+1)\pi}{4N} \leq kx \leq \frac{2N\pi}{4N} = \frac{\pi}{2}$$

Tedy

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\frac{\pi}{4} \leq \sin kx \leq \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

Řada koverguje stejnoměrně na nějakém $\mathcal{P}_+(0,\delta)$:

$$(\exists\delta > 0)(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall x \in (0,\delta))(\forall n \geq n_0)(\forall p \in \mathbb{N})\Big[\Big|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\Big| < \varepsilon\Big],$$

kde $f_k(x) = \frac{\sin kx}{k}$. Chci opak:

$$(\forall\delta > 0)(\exists\varepsilon > 0)(\forall n_0 \in \mathbb{N})(\exists x \in (0,\delta))(\exists n \geq n_0)(\exists p \in \mathbb{N})\Big[\Big|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\sin kx}{k}\Big| \geq \varepsilon\Big]$$

Nechť je $\delta > 0$ dáno: položím $\varepsilon = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $n_0 \in \mathbb{N}$ dáno.

Vezmu $N \geq n_0$, polož $x = \frac{\pi}{4N}$. BÚNO N velké, aby $x \in (0,\delta)$. Nechť $p = N$. Polož $n = N$:

$$\Big|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\sin kx}{k}\Big| = \Big|\sum_{k=N+1}^{2N} \frac{\sin kx}{k}\Big| \geq \frac{1}{2\sqrt{2}} = \varepsilon$$

Věta 4.13 (Leibnizovo kritérium stejnoměrné konvergence řady.)
Nechť $f_1(x) \geq f_2(x) \geq \cdots \geq f_k(x) \geq \cdots \geq 0$ platí $\forall x \in \mathcal{I}$, $\forall k \in \mathbb{N}$ a $f_k(x) \rightrightarrows 0$ v $\mathcal{I}$. Potom řada $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k f_k(x)$ konverguje stejnoměrně v $\mathcal{I}$.

Důkaz věty 4.13 Užiji V.4.12, kde $g_k(x) = (-1)^k$, čili stejně omezené částečné součty $f_k(x)$ splňují předpoklady V.4.12. Pak řada konverguje stejnoměrně v $\mathcal{I}$.

□

Příklad 4.8 Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{|x|+k}.$$

Tedy

$$0 \leq f_k(x) = \frac{1}{|x|+k} \leq \frac{1}{k}; \qquad f_k(x) \rightrightarrows 0 \text{ v } \mathbb{R}, \{f_k(x)\}_k \text{ nerostoucí}$$

konverguje stejnoměrně v $\mathbb{R}$.

Věta 4.14 (Abelovo kritérium stejnoměrné konvergence řady.)
Nechť řada $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$ konverguje stejnoměrně v $\mathcal{I}$. Nechť funkce $f_k(x)$ jsou stejně omezené v $\mathcal{I}$ a navíc pro pevné $x \in \mathcal{I}$ je posloupnost $\{f_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ monotónní. Potom řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)g_k(x)$ konverguje stejnoměrně v $\mathcal{I}$.

Důkaz věty 4.14 <u>1. krok:</u> Nechť $\{f_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ je neklesající. Pro všechna $x \in \mathcal{I}$ pevné platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x) f_k(x) = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x) M}_{\text{konverguje stejnoměrně v } \mathcal{I}} - \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x) \underbrace{[M - f_k(x)]}_{h_k(x)},$$

kde $M \geq 0$ je takové, že $-M \leq f_k(x) \leq M$ $\forall x \in \mathcal{I}$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Platí

$$0 \leq h_k(x) \leq 2M; \quad h_1(x) \geq h_2(x) \geq \cdots \geq h_k(x) \geq \cdots \geq 0.$$

Označme

$$(\Diamond\Diamond) \quad \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)[M - f_k(x)]$$

Ověřím B.C. podmínku stejnoměrné konvergence pro $(\Diamond\Diamond)$:

$\varepsilon > 0$ dáno: $\sum g_k(x)$ konverguje stejnoměrně v $\mathcal{I}$, tedy

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathcal{I})(\forall n \geq n_0)(\forall p \in \mathbb{N})\left[\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} g_k(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2M}\right].$$

Odhadem:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \underbrace{g_k(x)}_{\alpha_k} \underbrace{h_k(x)}_{\beta_k}\right| \leq \frac{\varepsilon}{2M} \underbrace{h_{n+1}(x)}_{\leq 2M} = \varepsilon$$

<u>2. krok:</u> $\{f_k(x)\}$ nerostoucí $\forall x \in \mathcal{I}$ pevné (plyne zrcadlově z (1))

<u>3. krok:</u> obecná situace: $\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2$;

$\{f_k(x)\}$ neklesající pro $x \in \mathcal{I}_1$

$\{f_k(x)\}$ nerostoucí pro $x \in \mathcal{I}_2$

Řada konverguje stejnoměrně v $\mathcal{I}_j$ dle kroku (1), (2)

$\Rightarrow$ konverguje stejnoměrně v $\mathcal{I}$.

$\square$

Příklad `4.9 Vyšetřete konvergenci řady`

$$\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^k}{x^2+k}}_{g_k(x)} \underbrace{\texttt{arctg }(kx)}_{f_k(x)}.$$

`Dle předchozího značení platí:`

$\sum g_k(x)$ `konverguje stejnoměrně v` $\mathbb{R}$: `dle Leibnize` $\frac{1}{x^2+k} \rightrightarrows 0$, `dále` $|\texttt{arctg }(kx)| \leq \frac{\pi}{2}$ `v` $\mathbb{R}$

pro $x \in \mathbb{R}$ pevné je arctg (kx) monotónní.

Věta 4.15 (<u>O zachování spojitosti při stejnoměrné konvergenci řady.</u>)
Nechť $f_k(x) : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$, kde $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ je libovolný interval. Jestliže $f_k(x) \in \mathcal{C}(\mathcal{I})$ a řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje lokálně stejnoměrně v $\mathcal{I}$, je funkce

$$s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

také spojitá v $\mathcal{I}$.

Důkaz věty 4.15 Označ $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$; pak $s_n(x) \in \mathcal{C}(\mathcal{I})$, $s_n(x) \overset{loc}{\rightrightarrows} s(x)$ v $\mathcal{I}$ (definice lokálně stejnoměrné konvergence řady)

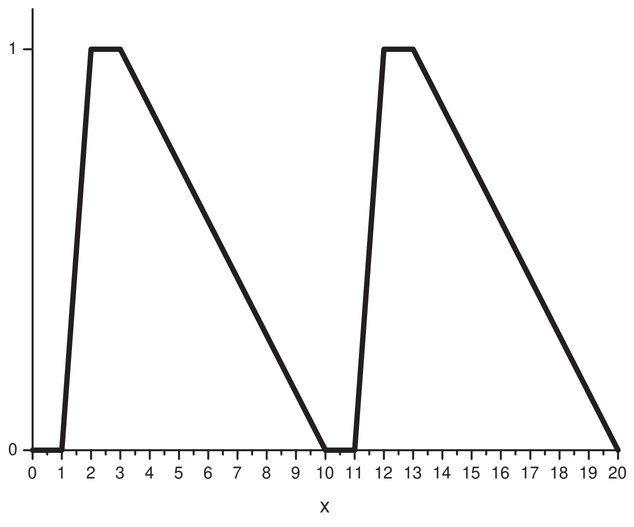
V.4.4 $\Rightarrow s(x) \in \mathcal{C}(\mathcal{I})$.

$\square$

Příklad 4.10

1. Existuje zobrazení $\Phi : [0,1] \overset{\text{na}}{\to} [0,1] \times [0,1]$? Ano.
2. Existuje takové navíc spojité? Ano.

Nechť $a \in [0,1]$ ... $a = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{2^k}$, kde $\alpha_k = 0$ nebo 1 (rozvoj a ve dvojkové soustavě).
Vlastnosti $\Psi(x)$: $\Psi(x) \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, Ψ má periodu 10.



Obrázek 4b.1: Graf zobrazení $\Psi(x)$.

Desítkový zápis x: $x = x_1\square\square\square x_i, \square\square$:

$$\Psi(x) \begin{cases} = 0 & \text{pro } x_1 = 0 \\ = 1 & \text{pro } x_1 = 2 \end{cases}$$

$$\Phi : t \mapsto (x(t), y(t))$$

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \Psi(10^{2k} t)$$

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \Psi(10^{2k+1} t)$$

Otázka: je na?

$$x(t) = 0,1101\ldots$$
$$y(t) = 0,0101\ldots$$
$$t = 0,\Box 20220\ldots$$

Tedy

$$x(t)_2 = 0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_k = 0,1$$
$$y(t)_2 = 0,\beta_1\beta_2\beta_3\ldots\beta_k = 0,1$$
$$t = 0,0(2\alpha_1)(2\beta_1)(2\alpha_2)(2\beta_2)\ldots$$

Spojitost $x(t)$: Nechť

$$f_k(t) = \frac{1}{2^k} \Psi(10^{2k} t) \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$$

Tedy

$|f_k(t)| \leq \dfrac{1}{2^k}$ řada konverguje absolutně stejnoměrně v $\mathbb{R}$ dle Weierstrassovy věty

$\Rightarrow x \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$

Také platí, že $x(t), y(t)$ nemají skoro nikde derivace.

Věta 4.16 (Derivování řady člen po členu.)
Jsou dány $f_k(x) : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$, kde $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ otevřený interval. Nechť existují vlastní derivace $f_k'(x)$ všude v $\mathcal{I}$. Jestliže

(1) řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$ konverguje lokálně stejnoměrně v $\mathcal{I}$

(2) existuje $x_0 \in \mathcal{I}$ tak, že $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_0)$ konverguje.

Pak

(a) řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje lokálně stejnoměrně v $\mathcal{I}$.

(b) platí $\left[\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right]' = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$ v $\mathcal{I}$.

Důkaz věty 4.16 Nechť $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ splní předpoklady V.4.7.
Závěry V.4.7 $\Rightarrow$ závěry V.4.16.

$\Box$

Kapitola 5

ODR podruhé

Pojmy v této kapitole: Exaktní rovnice, Eulerova rovnice. Věta o lokální existenci a jednoznačnosti řešení ODR.

Úmluva značení 5.1 Studujeme rovnici

$$(5*) \qquad M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

kde $M(x,y), N(x,y) : \Omega \to \mathbb{R}$ jsou spojité a $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina.

Poznámka 5.1

- nepřesně řečeno: řešením (5*) jsou křivky, jejichž tečný vektor ($\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$) je kolmý na (M, N).
- rovnice (5*) je souhrnné vyjádření dvou (za jistých předpokladů ekvivalentních) rovnic:

  $$(+) \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

  pro neznámou funkci $y = y(x)$, nebo

  $$(++) \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = -\frac{N(x,y)}{M(x,y)}$$

  pro neznámou funkci $x = x(y)$.
- Pokud existuje $V = V(x,y)$ tak, že $\nabla V = (M, N)$, jsou řešení rovnic (+), (++) (potažmo (5*)) vyjádřena implicitně podmínkou $V(x,y) = c$.

Příklad `5.1` $x\ \mathtt{d}x + y\ \mathtt{d}y = 0$

$$V(x,y) = \frac{1}{2}\Big(x^2 + y^2\Big)$$

$$(+) \quad \frac{\mathtt{d}y}{\mathtt{d}x} = -\frac{x}{y}$$

$$(++) \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = -\frac{y}{x}$$

Lemma 5.1 Nechť $V = V(x,y)$ je $\mathcal{C}^1$ na okolí bodu (x_0,y_0) taková, že $\nabla V = (M,N)$, a nechť $N(x_0,y_0) \neq 0$. Potom pro funkci $y(x) \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}(x_0))$, splňující $y(x_0) = y_0$ je ekvivalentní:

(1) funkce $y(x)$ řeší rovnici $(+)$ na okolí bodu x_0.

(2) funkce $y(x)$ je na okolí (x_0,y_0) implicitně zadána podmínkou $V(x,y) = c$, kde $c = V(x_0,y_0)$.

Důkaz lemmatu 5.1 Věta o implicitní funkci: $\exists! y = y(x) \in \mathcal{C}^1\Big(\mathcal{U}(x_0)\Big)$, splňuje $y = y(x_0) = y_0$ a platí (2).

<u>Chci:</u>

$$0 \neq \frac{\partial V}{\partial y}(x_0,y_0) = N(x_0,y_0)$$

Pomocný výpočet:

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} = \Big\{V\left(x,y(x)\right)\Big\}}_{LS} = \frac{\partial V}{\partial x}\left(x,y(x)\right) + \frac{\partial V}{\partial y}\left(x,y(x)\right)\cdot y'(c) = \underbrace{M\left(x,y(x)\right) + y'(x)N\left(x,y(x)\right)}_{PS}$$

$$(1) \Rightarrow (2)\text{: } (+) \Leftrightarrow PS = 0 \Rightarrow LS = 0 \Rightarrow V\left(x,y(x)\right) = c \text{ na } \mathcal{U}(x_0),\ c = V\left(x_0, \underbrace{y(x_0)}_{y_0}\right)$$

$$(2) \Rightarrow (1)\text{: } LS = 0 \Rightarrow PS = 0 \Leftrightarrow (+)$$

$\square$

Definice 5.1 Rovnice (5*) se nazve <u>EXAKTNÍ</u>, pokud M, N jsou $\mathcal{C}^1$ a platí

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Poznámka 5.2

- pokud existuje $V \in \mathcal{C}^2$ tak, že $\nabla V = (M,N)$, je (5*) nutně exaktní.

  Důkaz:
  $$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}V\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}V\right) = \frac{\partial N}{\partial x}$$

- platí i obráceně: je-li (5*) exaktní, existuje (alespoň lokálně) $V \in \mathcal{C}^2$ tak, že $\nabla V = (M,N)$.

Příklad 5.2 Počítejte

$$\underbrace{(\mathrm{e}^x + y)}_{M}\ \mathrm{d}x + \underbrace{(x + 2y\cos y^2)}_{N}\ \mathrm{d}y = 0$$

Platí

$$\tfrac{\partial M}{\partial y} = 1 \quad \tfrac{\partial N}{\partial x} = 1$$

Hledám V: $\frac{\partial V}{\partial x} = M = \mathrm{e}^x + y$, teď y fixuji, $\int\ \mathrm{d}x$:

$$V = \mathrm{e}^x + yx + c(y); \qquad c(y) = ? \quad \text{derivuji dle } y:$$

Tedy

$$\frac{\partial V}{\partial y} = x + c'(y) = N = x + 2y\cos y^2 \quad \Rightarrow \quad c(y) = \sin y^2$$

Shrnutí:

$$\underline{\underline{V = \mathrm{e}^x + xy + \sin y^2}}$$

Příklad 5.3 Počítejte:

$$\left(\frac{2x^2}{y} + xy^2\right)\ \mathrm{d}x + 3x^2y\ \mathrm{d}y = 0 \qquad (\odot)$$

Tato rovnice není exaktní, a tak hledám integrační faktor $\mu = \mu(x, y)$ tak, aby $(5*) \cdot \mu(x, y)$ byla exaktní:

Speciální tvar $\mu = \mu(x, y)$

$$\left.\begin{array}{l} \mu = \mu(x) \\ \mu = \mu(y) \\ \mu = \mu(xy) \\ \mu = \mu(\frac{x}{y}) \end{array}\right\} \mu = \mu(t)$$

V tomto příkladu použijeme integrační faktor ve tvaru $\mu = \mu(\frac{x}{y})$:

$$\mu\left(\frac{x}{y}\right)\left[\frac{2x^2}{y} + xy^2\right]\ \mathrm{d}x + \mu\left(\frac{x}{y}\right) \cdot x^2y\ \mathrm{d}y = 0$$

Podmínka exaktnosti má potom tvar

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{\mu\left(\frac{x}{y}\right)\left[\frac{2x^2}{y} + xy^2\right]\right\} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\mu\left(\frac{x}{y}\right) \cdot 3x^2y\right\}$$

Tedy

$$\mu'\left(\frac{x}{y}\right))\left(\frac{-x}{y^2}\right)\left[\frac{2x^2}{y} + xy^2\right] + \mu\left(\frac{x}{y}\right)\left[\frac{-2x^2}{y^2} + 2xy\right] = \mu'(\frac{x}{y}) \cdot \frac{1}{y} \cdot 3x^2y + \mu\left(\frac{x}{y}\right) \cdot 6xy$$

odtud

$$-\mu'\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \underbrace{\frac{x}{y}}_{t} = \mu\left(\frac{x}{y}\right) \qquad \ldots \qquad -\mu'(t) \cdot t = \mu(t)$$

`např.:`

$$\mu(t) = \frac{1}{t} \qquad \Rightarrow \qquad \mu = \frac{y}{x}$$

`pak je rovnice` $(\odot) \cdot (5*)$ `exaktní:`

$$\left(2x^3 + y^3\right) \ \mathtt{d}x + 3xy^2 \ \mathtt{d}y = 0$$

`Lze nalézt` V`:`

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 2x^3 + y^3$$

$$V = \frac{x^4}{2} + xy^3 + c(y)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = 3xy^2 + c'(y) = 3xy^2$$

$$c'(y) = 0$$

$$c = 0$$

`Tudíž`

$$V = \frac{1}{2}x^4 + xy^3.$$

Definice 5.2 Nechť $a_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, \dots, n$, $a_n \neq 0$. Rovnice

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k y^{(k)}(x) = b(x) \qquad (E)$$

se nazývá <u>EULEROVA ROVNICE</u>.

Poznámka 5.3

- je to lineární ODR n-tého řádu
- koeficienty nejsou konstantní, ale mají speciální tvar (u k-té derivace stojí x^k)
- bod $x = 0$ je problematický - anuluje se zde koeficient u nejvyšší derivace. Rovnici proto uvažujeme pouze v intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, +\infty)$
- obecné řešení (E) najdeme ve tvaru $y_o = y_h + y_p$, kde y_p je partikulární řešení (získané např. variací konstant), a y_h je obecné řešení homogenní úlohy

$$\mathcal{L}(y) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k y^{(k)}(x) = 0 \qquad (EH)$$

Poznámka 5.4 **Řešení (EH).** Trik: kladu $y(x) = |x|^\lambda$. Dostanu:

$$\mathcal{L}(|x|^\lambda) = |x|^\lambda \, p(\lambda)\,,$$

kde

$$p(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda(\lambda - 1) \dots (\lambda - k + 1)$$

nazývám CHARAKTERISTICKÝ POLYNOM EULEROVY ROVNICE. Platí:

1. Je-li $\lambda \in R$ k-násobný kořen $p(\lambda)$, jsou funkce

$$|x|^\lambda,\ |x|^\lambda \ln|x|, \dots, |x|^\lambda \ln^{k-1}|x|$$

řešení (EH).

2. Jsou-li $\alpha \pm i\beta$ k-násobné komplexně sdružené kořeny, jsou funkce

$$\begin{gathered}|x|^\alpha \cos(\beta \ln|x|),\ |x|^\alpha \cos(\beta \ln|x|)\ln|x|, \dots, |x|^\alpha \cos(\beta \ln|x|)\ln^{k-1}|x| \\ |x|^\alpha \sin(\beta \ln|x|),\ |x|^\alpha \sin(\beta \ln|x|)\ln|x|, \dots, |x|^\alpha \sin(\beta \ln|x|)\ln^{k-1}|x|\end{gathered}$$

řešení (EH).

Tvrzení. Funkce získané sub 1 a 2 tvoří fundamentální systém řešení (EH), tj. každé řešení (EH) lze psát jako jejich lineární kombinaci.

Příklad 5.4 Nalezněte F.S. rovnice

$$x^3y^{(3)} + x^2y^{(2)} + 3xy' - 8y = 0; \qquad y = |x|^\lambda.$$

Tedy

$$|x|^\lambda\{\lambda\cdot(\lambda-1)\cdot(\lambda-2) + \lambda\cdot(\lambda-1) + 3\lambda - 8\} = 0$$

Charakteristický polynom má tvar

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + 4\lambda - 8 = (\lambda^2+4)(\lambda-2),$$

kde $\lambda = 2, \pm 2i$

Tedy fundamentální systém řešení má tvar

$$F.S. = \Big\{|x|^2, \cos(2\ln|x|), \sin(2\ln|x|)\Big\} = \{x^2, \cos\ln x^2, \sin\ln x^2\}.$$

Poznámka 5.5 Substitucí $y(x) = u(\ln|x|)$, kde $u = u(t)$ je nová neznámá funkce, přejde Eulerova rovnice na rovnici s konstantními koeficienty.

Příklad 5.5 Nalezněte F.S. rovnice

$$x^2y'' + 3xy' + y = 0.$$

Platí:

$$y'(x) = \dot{u}(\ln|x|)\tfrac{1}{x}$$

$$y''(x) = \ddot{u}(\ln|x|)\tfrac{1}{x^2} - \dot{u}(\ln|x|)\tfrac{1}{x^2}$$

Tedy

$$x^2\left[\ddot{u}(\ln|x|)\frac{1}{x^2} - \dot{u}(\ln|x|)\frac{1}{x^2}\right] + 3x\left[\dot{u}(\ln|x|)\frac{1}{x}\right] + u(\ln|x|) = 0$$

Nechť $t = \ln|x|$, potom

$$\ddot{u}(t) + 2\dot{u}(t) = 0$$

`Tomu odpovídá charakteristický polynom:`

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = -1 \texttt{ je dvojnásobný kořen}$$

`F.S. pro` u`:` $\{\mathrm{e}^{-t}, t\mathrm{e}^{-t}\}$`, a tak F.S. pro` y `má tvar`

$$F.S. = \{|x|^{-1}, \ln|x| \cdot |x|^{-1}\}$$

Poznámka 5.6 Uvažujme rovnici $y' = f(x,y)$, pro $y = y(x)$.

Převedení (5*) na integrální tvar: L.5.1 minulého semestru: Lemma 5.1.: Jestliže f je spojitá, potom $y(x) \in \mathcal{C}(\mathcal{I})$ je řešení rovnice (5*) na I s počáteční podmínkou $y(x_0) = y_0$, kde $x_0 \in \mathcal{I}$, právě když

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s)) \;\mathrm{d}s \quad \forall x \in \mathcal{I} \quad (5**)$$

Věta 5.1 (Lokální existence a jednoznačnost řešení ODR.)
Nechť $f = f(x,y)$ je na jistém U okolí bodu $(x_0, y_0) \in R^2$ spojitá. Navíc nechť f je na U lipschitzovská vzhledem k y, tj.

$$|f(x,y) - f(x,\hat{y})| \le L|y - \hat{y}| \qquad \forall (x,y),\ (x,\hat{y}) \in U\,.$$

Potom existuje $\delta > 0$ takové, že na intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ existuje právě jedno řešení rovnice

$$y' = f(x,y)\,,$$

splňující počáteční podmínku $y(x_0) = y_0$.

Důkaz věty 5.1 Nechť $\mathcal{I}_\delta = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ a nechť $\Omega = \mathcal{I}_\delta \times [y_0 - \Delta, y_0 + \Delta]$.

Označme

$$\mathcal{X} = \{y(x) \in \mathcal{C}(\mathcal{I}_\delta) : |y(x) - y(x_0)| \le \Delta \quad \forall x \in \mathcal{I}_\delta\}$$

Mějme zobrazení:

$$\begin{aligned} \Phi :\ & \mathcal{X} \to \mathcal{X} \\ & y \mapsto \Phi y \end{aligned}$$

definované

$$[\Phi y](x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s)) \;\mathrm{d}s \quad \forall x \in \mathcal{I}_\delta$$

Klíčové pozorování: $y(x) \in \mathcal{X}$ řeší rovnici (5*) s počátečními podmínkami $y(x_0) = y_0 \Leftrightarrow \Phi y = y \ldots$ dle Lemmatu o převedení na integrální tvar.

Banachova věta o kontrakci: Nechť $\Phi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $\mathcal{X}$ je úplný prostor.

Φ je kontrakce: $\exists a \in (0,1)$

$\|\Phi(y) - \Phi(\hat{y})\|_{\mathcal{X}} \le a\|y - \hat{y}\|_{\mathcal{X}}$.

Pak $\exists! y \in \mathcal{X}$ tak, že $\Phi(y) = y$.

Tedy: $\mathcal{X}$ je úplný prostor: $y(x), \hat{y}(x) \in \mathcal{X}$,

$$\|y - \hat{y}\|_{\mathcal{X}} := \sup_{x \in \mathcal{I}_\delta} |y(x) - \hat{y}(x)|$$

Tedy $\mathcal{C}(\mathcal{I}_\delta)$ je úplný; $\mathcal{X} \subset \mathcal{C}(\mathcal{I}_\delta)$ je uzavřená … nelze vykonvergovat.

$y_n \subset \mathcal{X}$; $y_n \to y_0$ v $\mathcal{C}(\mathcal{I}_\delta) \Rightarrow y_0 \in \mathcal{X}$

V.7.11 z minulého semestru: $\mathcal{X}$ je též úplný

Zvolme δ, Δ tak malé, že $f \in \mathcal{C}(\Omega)$

$\Rightarrow \exists M > 0$; $|f| \leq M$ na Ω

f byla lipschitzovská vůči y s konstantou L na Ω

navíc nechť:

$$\delta \leq \min\left\{\frac{1}{2L}, \frac{\Delta}{M}\right\}$$

1. krok: $\Phi y \in \mathcal{X}$ pro $y \in \mathcal{X}$: $\Phi y \in \mathcal{C}(\mathcal{I}_\delta)$ … integrál spojité funkce

$$\Big|[\Phi y](x) - y_0\Big| \leq \Big|\int_{x_0}^{x} f\Big(s, y(s)\Big)\, \mathrm{d}s\Big| \leq |x - x_0| \cdot M \leq \delta \cdot M \leq \Delta$$

2. krok: Φ je kontrakce na $\mathcal{X}$. Vezměme $y, \tilde{y} \in \mathcal{X}$. Počítejme

$$\begin{aligned}
\Big|[\Phi y](x) - [\Phi \tilde{y}](x)\Big| &= \Big|\int_{x_0}^{x} f\Big(s, y(s)\Big)\, \mathrm{d}s - \int_{x_0}^{x} f\Big(s, \tilde{y}(s)\Big)\, \mathrm{d}s\Big| \\
&= \Big|\int_{x_0}^{x} \underbrace{f\Big(s, y(s) - f\Big(s, \tilde{y}(s)\Big)\, \mathrm{d}s}_{|f(s,y(s)) - f(s,\tilde{y}(s))| \leq L \cdot \underbrace{|y(s) - \tilde{y}(s)|}_{\leq \|y - \tilde{y}\|_{\mathcal{X}}}} \Big| \\
&\leq L \cdot \Big|\int_{x_0}^{x} |y(s) - \tilde{y}(s)|\, \mathrm{d}s\Big| \\
&\leq \underbrace{L \cdot \underbrace{|x - x_0|}_{\leq \delta}}_{\leq \frac{1}{2}} \cdot \|y - \tilde{y}\|\, \mathrm{d}s\Big|
\end{aligned}$$

Tedy

$$\forall x \in \mathcal{I}_\delta : \quad |[\Phi y](x) - [\Phi \tilde{y}](x)| \leq \frac{1}{2}\|y - \tilde{y}\|_{\mathcal{X}} \quad \sup x \in \mathcal{I}_\delta$$

Tedy

$$\|\Phi y - \Phi \tilde{y}\|_{\mathcal{X}} \leq \frac{1}{2}\|y - \tilde{y}\|_{\mathcal{X}}$$

□

Poznámka 5.7 Doplněk k Eulerově rovnici:

$$
\begin{aligned}
\tfrac{\partial}{\partial\lambda}\mathcal{L}\Big(|x|^\lambda\Big) &= \mathcal{L}\Big(\tfrac{\partial}{\partial\lambda}|x|^\lambda\Big) \\
\tfrac{\partial}{\partial\lambda}\textstyle\sum_{k=0}^n a_k x^k \tfrac{\partial^k}{\partial x^k}\{|x|^\lambda\} &= \textstyle\sum_{k=0}^n a_k x^k \tfrac{\partial}{\partial\lambda} \underbrace{\frac{\partial^k}{\partial x^k}\{|x|^\lambda\}}_{\text{záměna parc, derivací}} \\
&= \textstyle\sum_{k=0}^n a_k x^k \tfrac{\partial^k}{\partial x^k}\{\tfrac{\partial}{\partial\lambda}|x|^\lambda\} \\
&= \mathcal{L}\Big(\tfrac{\partial}{\partial\lambda}|x|^\lambda\Big)
\end{aligned}
$$

Poznámka 5.8 Obecně: Lineární diferenciální operátory komutují s derivacemi. Např.

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(\triangle u) = \triangle\Big(\frac{\partial u}{\partial x_k}\Big)$$

Kapitola 6

Míra. Lebesgueova míra.

Pojmy v této kapitole: σ-algebra, míra, vnější Lebesgueova míra, skoro všude (s.v.). Věta základních vlastnostech míry, o vlastnostech λ^*, o zavedení Lebesgueovy míry v $\mathbb{R}$, o základních vlastnostech λ.

> Motto: *Dospělý člověk … musí znát míru.*

Úmluva značení 6.1

- systém všech podmnožin $\mathcal{X}$: $\mathcal{P}(\mathcal{X}) = \{A : \ A \subset \mathcal{X}\}$ (potenční množina)
- rozdíl množin: $A \setminus B = \{x \in A : \ x \notin B\}$
- sjednocení množin (úmluva: j vždy probíhá $\mathbb{N}$):

$$\bigcup_j A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \{x : \ (\exists j) \ (x \in A_j)\}$$

- průnik množin:

$$\bigcap_j A_j = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \{x : \ (\forall j) \ (x \in A_j)\}$$

- de Morganovy vzorce:

$$B \setminus \bigcup_j A_j = \bigcap_j (B \setminus A_j) \qquad\qquad B \setminus \bigcap_j A_j = \bigcup_j (B \setminus A_j)$$

Definice 6.1 (σ-ALGEBRA.)
Nechť $\mathcal{X}$ je libovolná množina. Řekneme, že $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(\mathcal{X})$ je σ-ALGEBRA, pokud
(1) $\emptyset \in \mathcal{M}$
(2) $A \in \mathcal{M} \implies \mathcal{X} \setminus A \in \mathcal{M}$
(3) jsou-li $A_j \in \mathcal{M}$, $j \in \mathbb{N}$, je $\cup_j A_j \in \mathcal{M}$
Z vlastností σ-algebry dále plyne:

- $\mathcal{X} \in \mathcal{M}$
- jsou-li $A_j \in \mathcal{M}$, $j \in \mathbb{N}$, je $\cap_j A_j \in \mathcal{M}$

Příklad 6.1 $\mathcal{M} = \{\emptyset,\ \mathcal{X}\}$ a $\mathcal{M} = \mathcal{P}(\mathcal{X})$ jsou σ-algebry.

Definice 6.2 (MÍRA.)
Nechť $\mathcal{X}$ je libovolná množina, $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(\mathcal{X})$ je σ-algebra. Funkce $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ se nazve míra na $\mathcal{X}$, jestliže
(1) $\mu\emptyset = 0$
(2) jsou-li $A_j \in \mathcal{M}$ disjunktní, je

$$\mu\left(\bigcup_j A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu A_j$$

Trojice $(\mathcal{X}, \mathcal{M}, \mu)$ se nazývá PROSTOR S MÍROU, prvky $\mathcal{M}$ se nazývají MĚŘITELNÉ nebo μ-MĚŘITELNÉ MNOŽINY.

Příklad 6.2

- Počítací míra ν: $\mathcal{X}$ je libovolná množina, $\mathcal{M} = \mathcal{P}(\mathcal{X})$. νA = počet prvků A, je-li A konečná, a $\nu A = \infty$, je-li A nekonečná.
- Diracova míra δ_a v bodě a: $\mathcal{X}$ je libovolná množina, $a \in \mathcal{X}$ pevně zvolený bod, $\mathcal{M} = \mathcal{P}(\mathcal{X})$. $\delta_a(A) = 1$ pokud $a \in A$ a $\delta_a(A) = 0$ pokud $a \notin A$.
- Lebesgueova míra v $\mathbb{R}$ - zobecnění pojmu délka. Nelze $\mathcal{M} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$, tj. existují Lebesgueovsky neměřitelné množiny. Obecněji: Lebesgueova míra v R^n - pro n=2 plocha, pro n=3 objem, ...

Věta 6.1 (ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI MÍRY.)
Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je prostor s mírou, nechť A, A_j, B, $B_j \in \mathcal{M}$. Potom

(1) $A \subset B \implies \mu A \leq \mu B$

(2) je-li $A_j \subset A_{j+1}$ pro $j \in \mathbb{N}$, pak $\lim_{n\to\infty} \mu A_n = \mu(\cup_j A_j)$

(3) pro A_j libovolné: $\mu(\cup_j A_j) \leq \sum_j \mu A_j$

(4) je-li $B_j \supset B_{j+1}$ pro $j \in \mathbb{N}$, navíc $\mu B_1 < \infty$, pak $\lim_{j\to\infty} \mu B_j = \mu(\cap_j B_j)$

Důkaz věty 6.1

- Množina $B = A \cup B \setminus A$, kde A, B jsou disjunktní

$$\mu(B) = \mu(A) + \underbrace{\mu(B \setminus A)}_{\geq 0} \geq \mu A$$

- <u>Trik:</u> definuji $\hat{A}_j$:

$$\begin{aligned} &\hat{A}_1 = A_1 \\ &\hat{A}_2 = A_2 \setminus A_1 \\ &\vdots \\ &\hat{A}_j = A_2 \setminus \textstyle\bigcup_{k<j} A_k \end{aligned}$$

  vidím: $\hat{A}_j \subset A_j$ a

$$\bigcup_{j=1}^{n} A_j = \bigcup_{j=1}^{n} \hat{A}_j$$

  navíc $\hat{A}_j$ jsou disjunktní:

$$\mu A_j = \mu\Big(\bigcup_{k\leq j} A_k\Big) = \mu\Big(\bigcup_{k\leq j} \hat{A}_k\Big) = \sum_{k=1}^{j} \mu\hat{A}_k \to \sum_{k=1}^{\infty} \mu\hat{A}_k = \mu\Big(\bigcup_{k} \hat{A}_k\Big) = \mu\Big(\bigcup_{k} A_k\Big)$$

- A_j libovolné, $\hat{A}_j$ disjunktní, sestrojím jako výše. Potom

$$\mu\Big(\bigcup_{j} A_j\Big) = \mu\Big(\bigcup_{j} \hat{A}_j\Big) = \sum_{j} \mu\hat{A}_j \leq \sum_{j} \mu A_j$$

- Nechť $B_j \supset B_{j+1}\ \forall j$.

  Označme $A_j = B_1 \setminus B_j\ \ldots$ máme $A_j \subset A_{j+1}\ \forall j$ dle bodu (2): $\mu A_n \to \mu\Big(\bigcup_j A_j\Big)$
  Potom

$$\mu\Big(B_1 \setminus B_n\Big) \to \mu\Big(\bigcup_{j} \Big(B_1 \setminus B_j\Big)\Big) \underbrace{=}_{\text{dle Morgana}} \mu\Big(B_1 \setminus \bigcap_{j} B_j\Big)$$

  protože ale $B_j \subset B_1$, pak

$$\mu(B_1) - \mu(B_n) \to \mu(B_1) - \mu(\bigcap_{j} B_j)$$

  $\Rightarrow$ tedy

$$\mu(B_n) \to \mu(\bigcap_{j} B_j)$$

  Proč $\mu B_1 < +\infty$? Kvůli úvaze o odečtení $\mu(B_1)$.

□

Poznámka 6.1

- Body (2), (4): zobrazení $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ je spojité:
$$A_n \;\to\; \bigcup_j A_j$$
- Bod (3):
$$\mu\Big(\bigcup_j A_j\Big) \leq \sum \mu A_j \quad \sigma\text{-subaditivita}$$
- Předpoklad $\mu B_1 < \infty$ v bodě (4) je podstatný: μ počítací míra v $\mathbb{N}$, $B_j = \{n \in N : \; n \geq j\}$. Pak $\mu B_j = \infty \not\to \mu(\cap_j B_j) = \mu(\emptyset) = 0$.

Poznámka 6.2 Předběžně k záměně limity a integrálu:
$$f_n(x) \to f(x) \text{ v } \mathcal{I} \quad \Rightarrow \quad \int_{\mathcal{I}} f_n \to \int_{\mathcal{I}} f$$
obecně neplatí, je třeba dodatečný předpoklad:

1. pokud navíc: $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots \leq f_n(x)\ \forall x \in \mathcal{I}, \forall n \in \mathbb{N}$

   $\Rightarrow$ závěr platí: <u>Leviho věta</u>.
2. pokud $\exists h(x) : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ tak, že $|f_n(x)| \leq h(x)\ \forall x \in \mathcal{I}, \forall n \in \mathbb{N}$ a navíc $\int_{\mathcal{I}} h(x) < +\infty$

   $\Rightarrow$ závěr platí: <u>Lebesgueova věta</u>.

Úmluva značení 6.2 Pro libovolný interval $\mathcal{I}$ značí $|\mathcal{I}|$ délku $\mathcal{I}$. Připouštíme prázdné (délka je 0) a neomezené (délka je ∞) intervaly.

Definice 6.3 (<u>Vnější Lebesgueova míra.</u>)
Pro libovolnou $A \subset \mathbb{R}$ definujeme
$$\lambda^*(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\mathcal{I}_k|; \;\; \mathcal{I}_k \text{ otevřené intervaly}, \;\; A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{I}_k \right\}$$
Číslo $\lambda^*(A)$ se nazývá <u>vnější Lebesgueova míra</u> množiny A.

Poznámka 6.3 Připouštíme $\mathcal{I}_k$ prázdné.

Věta 6.2 (<u>Vlastnosti λ^*.</u>)
Platí:

(1) $0 \leq \lambda^*(A) \leq +\infty$

(2) $\lambda^*(\emptyset) = 0$

(3) $A \subset B \implies \lambda^*(A) \leq \lambda^*(B)$

(4) A vznikne posunutím $B \implies \lambda^*(A) = \lambda^*(B)$

(5) A_j libovolné: $\lambda^*\left(\cup_j A_j\right) \leq \sum_j \lambda^*(A_j)$

Důkaz věty 6.2

1. $\lambda^*(A)$ je infimum množiny nezáporných čísel $\Rightarrow$ zřejmě λ^* je nezáporná
2. $\emptyset$ (prázdnou množinu) pokryji prázdnými intervaly
3. $A \subset B : \mathcal{I}_k$ pokryjí $B \Rightarrow \mathcal{I}_k$ pokryjí A

   A má více pokrytí $\Rightarrow$ jejich infimum je menší nebo rovno $\inf(B)$
4. Nechť $A = x + B = \{x + b : b \in B\}$

   $\mathcal{I}_k$ pokryjí $B \Leftrightarrow x + \mathcal{I}_k$ pokryjí A

   celková délka pokrytí se posunutím nemění.
5. Případ 1: $\exists A_j, \lambda^*(A_j) = +\infty \quad \Rightarrow \quad PS = +\infty$, nerovnost platí.

   Případ 2: $\lambda^*(A_j) < +\infty \ \forall j$

   Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolné: dokáži:

   $$\lambda^*\Big(\bigcup_j A_j\Big) \leq \sum_j \lambda^*(A_j) + \varepsilon$$

   Máme $\varepsilon > 0$ dáno: pro každé A_j pevné $\exists \mathcal{I}_{j,k}$, $k \in \mathbb{N}$ tak, že

   $$\sum_{k=1}^{\infty} |\mathcal{I}_{j,k}| < \lambda^*(A_j) + \frac{\varepsilon}{2^j} \quad \ldots \text{ z vlastnosti infima}$$

   a platí

   $$A_j \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{I}_{j,k}$$

   Zřejmě $\{\mathcal{I}_{j,k}\}$ je spočetný systém intervalů pokrývající $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$:

   $$\lambda^*\Big(\bigcup_j A_j\Big) \leq \sum_{j,k} |\mathcal{I}_{j,k}| \underbrace{\leq}_{\substack{\sum_{j=1}^{\infty}(\sum_{k=1}^{\infty} |\mathcal{I}_{j,k}|)< \\ <\lambda^*(A_j)+\frac{\varepsilon}{2^j}}} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^*(A_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}$$

   Jelikož bylo $\varepsilon > 0$ libovolné $\Rightarrow$ platí to i bez ε.

□

Poznámka 6.4

- (4) ... λ^* je translačně invariantní
- (5) ... λ^* je σ-subaditivní

Lemma 6.1 Nechť $[a,b]$ je omezený uzavřený interval. Nechť $\mathcal{I}_k$ jsou otevřené a $[a,b] \subset \cup_k \mathcal{I}_k$. Potom $\sum_k |\mathcal{I}_k| \geq b-a$.

Důkaz lemmatu 6.1 Dle L.4.1 (o otevřeném podpokrytí): $\exists n \in \mathbb{N} : [a,b] \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{I}_k$.

Stačí dokázat: $\sum_{k=1}^{n} |\mathcal{I}_k| \geq b-a \ldots$ tím spíše $\sum_{k=1}^{\infty} |\mathcal{I}_k| \geq b-a$

Dokáži indukcí dle n:

$\mathcal{I}_1, \ldots \mathcal{I}_n$ jsou otevřené intervaly, $[a,b] \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{I}_k \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} |\mathcal{I}_k| \geq b-a$.

$n=1$: $\mathcal{I}_1 = (\alpha,\beta) \Rightarrow \alpha < a,\ \beta > b \Rightarrow |\mathcal{I}_1| = \beta-\alpha > b-a$ (což je zřejmé dle všech kritérií zřejmosti:-)

$n \Rightarrow n+1 : [a,b] \subset \bigcup_{k=1}^{n+1} \mathcal{I}_k$: potom $\exists \mathcal{I}_k$ tak, že $b \in \mathcal{I}_k$;

BÚNO $b \in \mathcal{I}_{n+1}$. Nechť $\mathcal{I}_{n+1} = (\alpha,\beta)$, zřejmě $\alpha < b < \beta$.

Případ 1: $\alpha \leq a \Rightarrow |\mathcal{I}_{n+1}| = \beta - \alpha \geq b-a$

$\Rightarrow$ nerovnost

$$(+) \qquad \sum_{k=1}^{n+1} |\mathcal{I}_k| \geq b-a$$

platí.

Případ 2: $\alpha \in (a,b)$: pozorování:

$$[a,\alpha] \subset \bigcup_{k=1}^{n} \mathcal{I}_k$$

Indukční předpoklad:

$$\sum_{k=1}^{n} |\mathcal{I}_k| \geq \alpha - a \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n+1} |\mathcal{I}_k| \geq \alpha - a + \beta - \alpha = \beta - a \geq b-a$$

□

Věta 6.3

(1) $\mathcal{I}$ je interval $\implies \lambda^*(\mathcal{I}) = |\mathcal{I}|$

(2) $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}$ je spočetná $\implies \lambda^*(\mathcal{N}) = 0$

Důkaz věty 6.3 (1):

<u>0. krok:</u> $\mathcal{I} = \emptyset \ldots$ dle V.6.2, části (2)

<u>1. krok:</u> $\mathcal{I} = [a, b]$ je omezený, uzavřený, $\varepsilon > 0$ libovolné:

pokrytí $\mathcal{I}$:

$$\mathcal{I}_1 = (a - \epsilon, b + \epsilon), \quad \mathcal{I}_k = \emptyset \text{ pro } k \geq 2$$

odtud

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} |\mathcal{I}_k| = b - a + 2\epsilon \quad \Rightarrow \quad \lambda^*([a, b]) \leq b - a + 2\epsilon$$

Nechť $\epsilon > 0$ libovolné: $\Rightarrow \lambda^*([a, b]) \leq b - a$

Opačná nerovnost: $\mathcal{I}_k$ pokrytí $[a, b]$, $\mathcal{I}_k$ otevřené:

L.6.1:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\mathcal{I}_k| \geq b - a \quad \Rightarrow \quad \lambda^*([a, b]) \geq b - a$$

<u>2. krok:</u> $\mathcal{I}$ libovolný omezený interval s krajními body $a < b$.

Pro $\epsilon > 0$ dosti malé: $[a + \epsilon, b - \epsilon] \subset \mathcal{I} \subset [a, b]$

Dle V.6.1:

$$\underbrace{\lambda^*([a + \epsilon, b - \epsilon])}_{= b - 1 - 2\epsilon \text{ dle 1. kroku}} \leq \lambda^*(\mathcal{I}) \leq \lambda^*([a, b]) \leq \lambda^*(\mathcal{I}) \leq b - a$$

<u>3. krok:</u> $\mathcal{I}$ je neomezený: $\forall n \in \mathbb{N}$ najdu $\mathcal{J}_n \subset \mathcal{I}$, $\mathcal{J}_n$ je omezený, $\mathcal{J}_n = n$.

Potom $\lambda^*(\mathcal{I}) \underbrace{\geq}_{V.6.2.(3)} \lambda^*(\mathcal{J}_n) = |\mathcal{J}_n| = n$

n libovolné: $\lambda^*(\mathcal{I}) = +\infty$

(2)

$\mathcal{N} \in \mathbb{R}$ je spočetná $\Rightarrow \lambda^*(\mathcal{N}) = 0$

<u>Důkaz č. 1:</u> $\lambda^*(\{x\}) = \lambda^*([x, x]) = x - x = 0$

<u>Důkaz č. 2:</u> pokrytí: $\{x\} \subset (x - \epsilon, x + \epsilon) = \mathcal{I}_1 \ldots |\mathcal{I}_1| = 2\epsilon$

$\mathcal{N}$ spočetná:

$$\mathcal{N} = \{x_j : j \in \mathbb{N}\} : \lambda^*(\mathcal{N}) = \lambda^*\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty}\{x\}\Big) \underbrace{\leq}_{V.6.2.(5)} \sum_{j=1}^{\infty}\lambda^*(\{x_j\}) = 0$$

$\square$

Poznámka 6.5

- speciálně $\lambda^*(\mathbb{Q}) = 0$, tedy očekáváme $(\mathcal{L})\int_{\mathbb{R}} D(x)\ \mathrm{d}x = 0$.
- λ^* má všechny dobré vlastnosti, které požadujeme od míry, leč není obecně aditivní: $\exists A_j \subset \mathbb{R}$ disjunktní tak, že $\lambda^*\left(\cup_j A_j\right) < \sum_j \lambda^*(A_j)$.

Příklad 6.3 <u>Důležitý příklad:</u> definuji v $\mathbb{R}$ relaci $\sim$ takto:

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$

Relace $\sim$ je ekvivalence:

$$\begin{aligned} (i) &\quad x \sim x : x - x = 0 \in \mathbb{Q} \\ (ii) &\quad x \sim y \Leftrightarrow y \sim x \\ (iii) &\quad x \sim y \ \&\ y \sim z \Rightarrow x \sim z \end{aligned}$$

Relace $\sim$ definuje v $\mathbb{R}$ disjunktní rozklad na třídy ekvivalence M_α.

Tedy $\mathbb{R} = \bigcup_{\alpha\in A}\mathcal{M}_\alpha$ ... disjunktní.

$x, z \in \mathcal{M}_\alpha \ \Rightarrow\ x \sim y$, ale $x \not\sim z$ pro $z \in \mathcal{M}_{\alpha'}$, $\alpha' \neq \alpha$.

Jedna z $\mathcal{M}_\alpha = \mathbb{Q}$

Jiná z $\mathcal{M}_{\alpha'} = \sqrt{2} + \mathbb{Q} = \{\sqrt{2} + q; q \in \mathbb{Q}\}$

Pozn.: každá $\mathcal{M}_\alpha$ je spočetná, ale je jich nespočetně. $\mathcal{M}$: množina taková, že má s každým $\mathcal{M}_\alpha$ společný právě jeden prvek.

$\mathcal{M}$ je nespočetná.

<u>Klíčové pozorování:</u>

$$\mathbb{R} = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \underbrace{(q + \mathcal{M})}_{\texttt{vzájemně disjunktní}}$$

<u>Tvrzení 1:</u> $\lambda^*(\mathcal{M}) > 0$. Nechť ne:

$$\lambda^*(\mathcal{M}) = 0, \lambda^*(\mathbb{R}) = \lambda^*\Big(\bigcup_{q\in Q}(q + \mathcal{M})\Big) \underbrace{\leq}_{V.6.2.(5)} \sum_{q\in\mathbb{Q}} \underbrace{\lambda^*(q + \mathcal{M})}_{=0 \texttt{ dle V.6.2.(4)}} = 0 \quad \texttt{Spor.}$$

Tvrzení 2:

$$0 < \lambda^*(\mathcal{M}) = \lambda^* \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} M \cap (-k,k) \right) \le \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^* \left(M \cap (-k,k) \right)$$

Tedy $\exists k \in \mathbb{N}$ tak, že

$$\lambda^* \underbrace{(M \cap (-k,k))}_{A} = \delta > 0$$

Pro $j \in \mathbb{N}$ označ:

$$A_j = \frac{1}{j} + A = \left\{ \frac{1}{j} + a, a \in A \right\}$$

z předchozího: A_j vzájemně disjunktní (posun o racionální číslo). Nechť $\lambda^*(A_j) = \delta$ a nechť $A_j \subset (-k, k+1)$ $\Rightarrow$ spor s aditivitou λ^*:

$$\underbrace{\lambda^* \left(\bigcup_{j-1}^{n} A_j \right)}_{\le 2k+1} = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \lambda^*(A_j)}_{n\delta}$$

Pro n dost velké nastane spor.

Definice 6.4 (CARATHÉODORYHO DEFINICE MĚŘITELNOSTI.)
Množina $A \subset \mathbb{R}$ se nazve měřitelná podle Carathéodoryho, pokud

$$\lambda^*(T) = \lambda^*(T \cap A) + \lambda^*(T \setminus A)$$

platí pro libovolnou testovací množinu $T \subset \mathbb{R}$.

Poznámka 6.6

- názorně: A rozdělí libovolnou T aditivně

$$T = (T \cap A) \cup (T \setminus A) \text{ disjunktní}$$

- nerovnost $\le$ platí vždy (subaditivita)
- netriviální nerovnost $\ge$

Věta 6.4 (ZAVEDENÍ LEBESGUEOVY MÍRY V $\mathbb{R}$.)

Označme

$$\mathcal{M}_1 = \{A \subset \mathbb{R} : \ A \text{ je měřitelná dle Carathéodoryho}\}.$$

Potom $\mathcal{M}_1$ je σ-algebra a $\lambda = \lambda^*|_{\mathcal{M}_1}$ je míra. Terminologie: λ se nazývá Lebesgueova míra v $\mathbb{R}$, prvky $\mathcal{M}_1$ se nazývají (Lebesgueovsky) měřitelné množiny.

Důkaz věty 6.4 1. krok: $\emptyset \in \mathcal{M}_1$, T je libovolná testovací množina:

$$\lambda^*(T) = \underbrace{\lambda^*(T \cap \emptyset)}_{\emptyset} + \underbrace{\lambda^*(T \setminus \emptyset)}_{T}$$

<u>2. krok:</u>

$$A \in \mathcal{M}_1 \ \Leftrightarrow \ \lambda^*(T \cap A) + \lambda^*(T \setminus A) \ \ \forall T$$

$$\mathbb{R} \setminus A \in \mathcal{M}_1 \ \Leftrightarrow \ \lambda^*(T) = \lambda^* \underbrace{(T \cap (\mathbb{R} \setminus A))}_{T \setminus A} + \lambda^* \underbrace{(T \setminus (\mathbb{R} \setminus A))}_{T \cap A} \ \ \forall T$$

$$\Rightarrow \ \ A \in \mathcal{M}_1 \ \Leftrightarrow \ \mathbb{R} \setminus A \in \mathcal{M}_1$$

<u>3. krok:</u> $A, B \in \mathcal{M}_1 \ \Rightarrow \ A \cap B \in \mathcal{M}_1$, zvolme T libovolná
cíl: $\lambda^*(T) = \lambda^*(T \cap (A \cap B)) + \lambda^*(R \setminus (A \cap B)) \quad (\odot)$
Tedy:

$$A \in \mathcal{M}_1 \ \Rightarrow \ \lambda^*(T) = \lambda^*(T \cap A) + \lambda^*(T \setminus A) \tag{1}$$

$B \in \mathcal{M}_1$, zvolím $T \cap A$ testovací:

$$\lambda^*(T \cap A) = \lambda^*((T \cap A) \cap B) + \lambda^*((T \cap A) \setminus B) \tag{2}$$

$A \in \mathcal{M}_1$, zvolím $T \setminus (A \cap B)$ testovací:

$$\lambda^*(T \setminus (A \cap B)) = \lambda^* \underbrace{((T \setminus (A \cap B)) \cap A)}_{(T \cap A) \setminus B} + \lambda^* \underbrace{((T \setminus (A \cap B)) \setminus A)}_{T \setminus A} \tag{3}$$

Tedy

$$\lambda^*\Big(T \cap A \cap B\Big) + \lambda^*\Big(T \setminus (A \cap B)\Big) \overset{(2),(3)}{=}$$
$$\lambda^*\Big(T \cap A\Big) - \lambda^*\Big((T \cap A) \setminus B\Big) + \lambda^*\Big((T \cap A) \setminus B\Big) + \lambda^*\Big(T \setminus A\Big) \overset{(1)}{=}$$
$$\lambda^*\Big(T\Big)$$

$\mathcal{M}_1$ je uzavřená na konečné průniky $\Rightarrow$ je uzavřená na konečná sjednocení (de Morgan)

$$A, B \in \mathcal{M}_1 \ \Rightarrow \ A \cup B = \mathbb{R} \setminus \Big(\mathbb{R} \setminus (A \cup B)\Big) = \mathbb{R} \setminus \Big(\underbrace{(\mathbb{R} \setminus A)}_{\in \mathcal{M}_1} \cap \underbrace{(\mathbb{R} \setminus B)}_{\in \mathcal{M}_1}\Big) \ \Rightarrow \ A \cup B \in \mathcal{M}_1$$

<u>4. krok:</u> $A, B \in \mathcal{M}_1$ disjunktní
chci: $\lambda^*(A \cup B) = \lambda^*(A) + \lambda^*(B)$
Tedy: $A \in \mathcal{M}_1$, a tak testuji $T = A \cup B$

$$\lambda^*(A \cup B) = \lambda^*\Big(\underbrace{(A \cup B) \setminus A}_{B}\Big) + \lambda^*\Big(\underbrace{(A \cup B) \cap A}_{A}\Big)$$

$\Rightarrow$ indukcí: $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{M}_1$ disjunktní

$$\Rightarrow \quad \lambda^*\Big(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} \lambda^*(A_j)$$

<u>5. krok:</u> $A_j \in \mathcal{M}_1$ disjunktní, $j \in \mathbb{N}$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda^*(A_j) = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} \lambda^*(A_j) \overset{=}{\text{krok 4}} \lim_{n \to \infty} \lambda^*\Big(\underbrace{\bigcup_{j=1}^{n} A_j}_{a_n}\Big) \le \lambda^*\Big(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\Big)$$

a_n neklesající $\Rightarrow$ limita existuje,

$$a_n \leq \lambda^*\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big)$$

opačná nerovnost platí vždy - subaditivita
chybí: $A_j \in \mathcal{M}_1 \;\Rightarrow\; \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{M}_1$

$\square$

Věta 6.5 (Základní vlastnosti λ.)

1. $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}$ a $\lambda^*(\mathcal{N}) = 0 \implies \mathcal{N} \in \mathcal{M}_1$ a $\lambda(\mathcal{N}) = 0$
2. $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ je interval $\implies \mathcal{I} \in \mathcal{M}_1$ a $\lambda(\mathcal{I}) = |\mathcal{I}|$
3. otevřené a uzavřené množiny jsou měřitelné.

Důkaz věty 6.5
(1): zvolme T:

$$\underbrace{\lambda^*(\mathrm{T} \cap \mathcal{N})}_{\leq \lambda^*(\mathcal{N})=0} + \underbrace{\lambda^*(\mathrm{T} \setminus \mathcal{N})}_{\leq \lambda^*(T)} \leq \lambda^*(T)$$

opačná nerovnost platí vždy
$\mathcal{N} \in \mathcal{M}_1$ je měřitelná, $\lambda(\mathcal{N}) = \lambda^*(\mathcal{N}) = 0$

(2): Nechť $\mathcal{I} = (-\infty, a)$, nechť T libovolná, stačí

$$\lambda^*(T) \geq \lambda^*(T \cap \mathcal{I}) + \lambda^*(T \setminus \mathcal{I})$$

BÚNO $\lambda^*(T) < +\infty$ (pro $\lambda^*(T) = \infty$ nerovnost platí vždy)

$\varepsilon > 0$ dáno, $\exists I_k$ otevřené intervaly: $T \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{I}_k$ takto:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\mathcal{I}_k| < \lambda^*(T) + \varepsilon \quad \text{z vlastnosti infima}$$

rozdělím $\mathcal{I}_k = \mathcal{I}_k^1 \cup \mathcal{I}_k^2$ otevřené intervaly:

$$\begin{aligned} &\mathcal{I}_k \cap \mathcal{I} \subset \mathcal{I}_k^1 \\ &\mathcal{I}_k \setminus \mathcal{I} \subset \mathcal{I}_k^2 \\ &|\mathcal{I}_k^1| + |\mathcal{I}_k^2| \leq |\mathcal{I}_k| + \tfrac{\varepsilon}{2^k} \end{aligned}$$

- $\mathcal{I}_k \subset \mathcal{I}$: volíme $\mathcal{I}_k^1 = \mathcal{I}_k,\ \mathcal{I}_k^2 = \emptyset$
- $\mathcal{I}_k \cap \mathcal{I} = \emptyset$: $\Rightarrow \mathcal{I}_k^1 = \emptyset,\ \mathcal{I}_k^2 = \mathcal{I}$

Pozorování:

$$\begin{aligned} &T \cap \mathcal{I} \subset \textstyle\bigcup_k \mathcal{I}_k^1 \\ &T \setminus \mathcal{I} \subset \textstyle\bigcup_k \mathcal{I}_k^2 \end{aligned}$$

tedy

$$\lambda^*(T \cap \mathcal{I}) + \lambda^*(T \setminus \mathcal{I}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\mathcal{I}_k^1| + \sum_{k=1}^{\infty} |\mathcal{I}_k^2| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\mathcal{I}_k| + \varepsilon < \lambda^*(T) + 2\varepsilon$$

ε libovolně malé: $\mathbb{R} \setminus (-\infty, a) = [a, +\infty) \in \mathcal{M}_1$
analogicky: $(b, +\infty), (-\infty, b] \in \mathcal{M}_1$
$\Rightarrow$ každý interval $\mathcal{I} \in \mathcal{M}_1$, $\lambda(\mathcal{I}) \underset{\text{DEF.}}{=} \lambda^*(\mathcal{I}) = |\mathcal{I}|$

(3): $A \subset \mathbb{R}$ otevřená $\Rightarrow \tilde{A} \in \mathcal{M}_1$
uvažujme intervaly $\mathcal{I} = (p, q)$; $p, q \in \mathbb{Q}$, $\mathcal{I} \subset A$ - je jich spočetně, označ $\{\mathcal{I}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$

KLÍČOVÉ POZOROVÁNÍ: $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{I}_k$ ($\Rightarrow A \in \mathcal{M}_1$)

"$\supset$" zřejmé ($\mathcal{I}_k \subset A$)

"$\subset$": $x_0 \in A \;\Rightarrow\; \exists \delta > 0 : (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \subset A$

$\exists p, q \in \mathbb{Q} : x_0 - \delta < p < x_0 < q < x_0 + \delta \Rightarrow x_0 \in (p, q) \subset PS$

$B \in \mathbb{R}$ je uzavřená $\Rightarrow B \in \mathcal{M}_1$

$B = \mathbb{R} \setminus (\mathbb{R} \setminus B)$ je otevřená $\Rightarrow \mathbb{R} \setminus B \in \mathcal{M}_1$

□

Definice 6.5 (<u>SKORO VŠUDE.</u>)
Nechť $\tilde{A} \subset \mathbb{R}$ je měřitelná. Řekneme, že výrok $P(x)$ platí skoro všude v $\tilde{A}$, pokud existuje $\mathcal{N} \subset \tilde{A}$ tak, že $P(x)$ platí pro všechna $x \in \tilde{A} \setminus \mathcal{N}$. Tj. skoro všude = až na množinu míry nula, zkratka: "s.v."

Příklad 6.4 `Dirichletova funkce` $D(x) = 0$ `s.v. v` $\mathbb{R}$.

Úmluva značení 6.3 Pro účely teorie míry se definuje $0 \cdot (\pm\infty) = 0$.

Poznámka 6.7 Nechť $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ je interval; $\mathcal{I} = (\mathcal{I} \cap \mathbb{Q}) \cup (\mathcal{I} \setminus \mathbb{Q})$ disjunktní. Potom

$$\lambda(\mathcal{I}) = \underbrace{\lambda(\mathcal{I} \cap \mathbb{Q})}_{=0} + \underbrace{\lambda(\mathcal{I} \setminus \mathbb{Q})}_{=\lambda(\mathcal{I})}$$

Kapitola 7

Lebesgueův integrál v $\mathbb{R}$

Pojmy v této kapitole: Měřitelná funkce, charakteristická funkce množiny, jednoduchá funkce, Lebesgueův integrál, Gamma funkce, hlavní hodnota integrálu, integrál komplexní funkce. Věta o vlastnostech měřitelných funkcí, o vlastnostech jednoduchých funkcí, o souvislosti jednoduchá - měřitelná, Leviho, o vlastnostech $\mathcal{L}(\mathcal{M})$, Lebesgueova, Leviho pro řady, vztah L.i. a N.i., Lebesgueova pro řady, spojitost integrálu vůči parametru, derivace integrálu dle parametru.

Poznámka 7.1 Proč $f(x)$ nemá integrál?

- je moc velká (krajní případ: $\int = \pm\infty$)
- je příliš nespojitá

Nechť $\mathcal{N} = \{\text{body nespojitosti}\}$. Potom:

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ má R.i.} \Rightarrow \lambda(\mathcal{N}) = 0 \\ f \text{ má N.i.''} \Rightarrow \text{''}\lambda(\mathcal{N}) \text{ je konečná} \end{array}\right\} \text{příliš restriktivní: nezachovávají se při bodové konvergenci}$$

Nechť f_n mají R.i.; $f_n \to f$ nemá R.i.
Prostor integrovatelných funkcí není úplný.

Definice 7.1 (Měřitelná funkce.)
Nechť $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}$ je měřitelná množina. Funkce $f(x) : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^*$ se nazve měřitelná, jestliže pro každé $a \in \mathbb{R}$ je množina

$$\{x \in \mathcal{M} :\ f(x) > a\} = \{f > a\}$$

měřitelná.

Poznámka 7.2 Ekvivalentně lze požadovat, že $\forall a$ jsou množiny $\{f < a\}$ resp. $\{f \geq a\}$ resp. $\{f \leq a\}$ měřitelné.

Věta 7.1 (Vlastnosti měřitelných funkcí.) Nechť f, g, f_n jsou měřitelné v $\mathcal{M}$. Potom

1. $f+g$, fg, f/g jsou měřitelné v $\mathcal{M}$
2. $\max\{f,\, g\}$, $\min\{f,\, g\}$ jsou měřitelné v $\mathcal{M}$
3. $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\lim_{n\to\infty} f_n$ jsou měřitelné v $\mathcal{M}$

(pokud mají smysl.)

Důkaz věty 7.1 (částečný)
(1) $f+g$ měřitelná:

$$\{f+g>\alpha\} = \underbrace{\bigcup_{\substack{p,q\in\mathbb{Q}\\ p+q>\alpha}}}_{\cdots\ \text{spočetné sjednocení}} \{f>p\}\cap\{g>q\}$$

"$\supset$" zjevná:
"$\subset$": rozmyslet

$$f(x)+g(x)>\alpha:\ \exists p,q:\ \begin{array}{l} f(x)>p,\\ g(x)>q,\\ p+q>\alpha,\\ p,q\in\mathbb{Q}.\end{array}$$

(2) $\max\{f,g\}$ měřitelná:

$$\{\max\{f,g\}>\alpha = \underbrace{\{f>\alpha\}}_{\in\mathcal{M}_1}\cup\underbrace{\{g>\alpha\}}_{\in\mathcal{M}_1}$$

(3) $\sup_n f_n$ měřitelná:

$$\{(\sup f_n)>\alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\underbrace{\{f_n>\alpha\}}_{\in\mathcal{M}_1}$$

□

Věta 7.2

1. $f=g$ s.v. v $\mathcal{M}$, kde f je měřitelná v $\mathcal{M}$ $\implies$ g je měřitelná v $\mathcal{M}$
2. $\mathcal{I}$ je interval a $f\in\mathcal{C}(\mathcal{I}\setminus\mathcal{K})$, kde $\mathcal{K}$ je konečná $\implies$ f je měřitelná v $\mathcal{I}$

Důkaz věty 7.2
(1)

$$\{g>\alpha\} = \Big(\{f>\alpha\}\setminus\mathcal{N}_1\Big)\cup\mathcal{N}_2$$

$f=g$ s.v. … lze volit $\mathcal{N}_1,\mathcal{N}_2$ s nulovou mírou $\Rightarrow \mathcal{N}_1,\mathcal{N}_2\in\mathcal{M}_1 \Rightarrow \{g>\alpha\}\in\mathcal{M}_1$

(2) dle (1): BÚNO $f(x)=-\infty$ v $\mathcal{K}$, krajní body intervalu $\mathcal{I}$ patří do $\mathcal{K}$. Potom

$$\mathcal{I}\setminus\mathcal{K} = \bigcup_{k=1}^{n}\mathcal{I}_k,$$

kde $\mathcal{I}_k$ jsou otevřené intervaly, $f \in \mathcal{C}(\mathcal{I}_k)$. A tak

$$\{f > \alpha\} = \bigcup_{k=1}^{n} \{x \in \mathcal{I}_k : f(x) > \alpha\} \quad \text{...otevřené množiny ze spojitosti } f(x)$$

$\Rightarrow$ měřitelné dle V.6.5

□

Příklad 7.1 `Dirichletova funkce` $D(x) = 0$ `s.v.` $\implies$ `je měřitelná v` $\mathbb{R}$.

Definice 7.2 (Měřitelná funkce - zobecnění.)
Funkce f se nazve měřitelnou v $\mathcal{M}$, pokud existuje $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ a funkce $g : (\mathcal{M} \setminus \mathcal{N}) \to \mathbb{R}^*$ tak, že $\lambda(\mathcal{N}) = 0$, $f = g$ na $\mathcal{M} \setminus \mathcal{N}$ a g je měřitelná v $\mathcal{M} \setminus \mathcal{N}$ dle původní definice.

Spec. funkce měřitelná v $\mathcal{M}$ může být definována jen s.v. v $\mathcal{M}$.

Příklad 7.2 `Funkce` $f(x) = 1/x$ `je měřitelná v` $\mathbb{R}$.

Definice 7.3 (Charakteristická funkce množiny.)
Nechť $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$ je libovolná množina. Funkce

$$\chi_{\mathcal{A}}(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathcal{A} \\ 0 & x \notin \mathcal{A} \end{cases}$$

se nazývá charakteristická funkce množiny $\mathcal{A}$.

Příklad 7.3 `Dirichletova funkce` $D(x) = \chi_Q(x)$.

Definice 7.4 (Jednoduchá funkce.)
Nechť $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}$ je měřitelná množina. Funkce $f(x) : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ se nazve jednoduchá, jestliže existují čísla $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ a měřitelné množiny $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n \subset \mathcal{M}$ tak, že

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{\mathcal{A}_k}(x) \qquad x \in \mathcal{M}\,. \qquad (\otimes)$$

Lebesgueův integrál jednoduché funkce definujeme jako

$$\int_{\mathcal{M}} f \;\; \mathrm{d}\lambda = \sum_{k=1}^{n} c_k \lambda(\mathcal{A}_k)$$

Poznámka 7.3 Definice integrálu je korektní, třebaže pro danou jednoduchou funkci není tvar $(\otimes)$ určen jednoznačně.

Věta 7.3 (Vlastnosti jednoduchých funkcí.) Nechť f, g jsou jednoduché funkce v $\mathcal{M}$.

1. $f \le g$ v $\mathcal{M}$ $\Longrightarrow$ $\int_{\mathcal{M}} f \ \mathrm{d}\lambda \le \int_{\mathcal{M}} g \ \mathrm{d}\lambda$
2. α, $\beta \in \mathbb{R}$ $\Longrightarrow$ $\alpha f + \beta g$ je jednoduchá a $\int_{\mathcal{M}} \alpha f + \beta g \ \mathrm{d}\lambda = \alpha \int_{\mathcal{M}} f \ \mathrm{d}\lambda + \beta \int_{\mathcal{M}} g \ \mathrm{d}\lambda$

Důkaz věty 7.3 vynecháváme

□

Věta 7.4 (<u>Souvislost jednoduchá - měřitelná.</u>)

1. funkce jednoduchá v $\mathcal{M}$ je měřitelná v $\mathcal{M}$
2. $f \ge 0$ s.v. v $\mathcal{M}$ je měřitelná $\Longleftrightarrow$ $\exists\ f_n$ jednoduché tak, že $0 \le f_1(x) \le f_2(x) \le \cdots \le f_n(x) \to f(x)$ s.v. v $\mathcal{M}$

Důkaz věty 7.4 (1):

$$f = \sum_{k=1}^{n} c_k \Xi_{\mathcal{A}_k} :$$

BÚNO $\mathcal{A}_K$ disjunktní:

$$\{f > \alpha\} = \bigcup_{\{k: c_k > \alpha\}} \mathcal{A}_k$$

(2): "$\Leftarrow$": $\exists$ jednoduché $f_n \nearrow f$ s.v.
f_n měřitelné dle (1), tudíž

$$f = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n \quad \text{měřitelné dle V.7,1,(3)}$$

<u>s.v.</u> nevadí dle V.7.2.(1)

"$\Rightarrow$": BÚNO: $f \ge 0$ všude. Pro $n \in \mathbb{N}$; $k = 1, \ldots, n \cdot 2^n$ definuji

$$F_{n,k} := \left\{ x : \frac{k-1}{2^n} \le f(x) < \frac{k}{2^n} \right\}$$

a definuji

$$f_n(x) := \begin{cases} \frac{k-1}{2^n} & x \in F_{n,k} \\ \\ n & x \notin \bigcup_{k=1}^{n \cdot 2^n} F_{n,k} \end{cases}$$

pro $n \in \mathbb{N}$ pevné %%%%% obrázek

f_n jednoduché: $\{f > \alpha\}$ je měřitelná

$$F_{n,k} = \underbrace{\left\{ f \ge \frac{k-1}{2^n} \right\}}_{\in \mathcal{M}_1} \cap \underbrace{\left\{ f < \frac{k-1}{2^n} \right\}}_{\in \mathcal{M}_1}$$

$$\begin{aligned}&f_n \le f\\&f_n \le f_{n+1}\\&f_n \to f \text{ pro } n \to \infty\end{aligned}$$

□

Definice 7.5 (<u>LEBESGUEŮV INTEGRÁL.</u>)
Nechť $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}$ je měřitelná množina, nechť $f(x)$ je měřitelná v $\mathcal{M}$.

1. Je-li $f \ge 0$ s.v. v $\mathcal{M}$, definuji
$$\int_{\mathcal{M}} f \ \ d\lambda = \sup\{\int_{\mathcal{M}} g \ \ d\lambda : \ g \text{ jednoduchá}, \ g \le f \text{ s.v. v } \mathcal{M}\}$$
2. Pro f obecnou píši $f = f^+ - f^-$, kde $f^+ = \max\{f, \ 0\}$, $f^- = \max\{-f, \ 0\}$ a definuji
$$\int_{\mathcal{M}} f \ \ d\lambda = \int_{\mathcal{M}} f^+ \ \ d\lambda - \int_{\mathcal{M}} f^- \ \ d\lambda$$
má-li pravá strana smysl.

Úmluva značení 7.1 Terminologie a značení:

- $\mathcal{L}^*(\mathcal{M})$ ... funkce, které mají Lebesgueův integrál.
- $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ ... funkce, které mají *konečný* Lebesgueův integrál.
- $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M})$ ... f je Lebesgueovsky integrovatelná, integrál konverguje
- $f \in \mathcal{L}^*(\mathcal{M}) \setminus \mathcal{L}(\mathcal{M})$ ... f má Lebesgueův integrál, integrál existuje, ale: integrál nekonverguje, funkce *není* Lebesgueovsky integrovatelná

Poznámka 7.4

- Definice není ve sporu s původní definicí integrálu jednoduché funkce.
- Funkce nemá Leb. int. pokud: a) je neměřitelná, b) integrál kladné i záporné části je ∞.
- Nezáporná měřitelná funkce vždy má Lebesgueův integrál.
- f, g měřitelné, $0 \le f \le h$ s.v. v $\mathcal{M} \implies \int_{\mathcal{M}} f \ \ d\lambda \le \int_{\mathcal{M}} h \ \ d\lambda$
- $f \in \mathcal{L}^*(\mathcal{M})$, $g = f$ s.v. v $\mathcal{M} \implies g \in \mathcal{L}^*(\mathcal{M})$ a $\int_{\mathcal{M}} f \ \ d\lambda = \int_{\mathcal{M}} h \ \ d\lambda$
- $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$ disjunktně $\implies$
$$\int_{\mathcal{M}} f \ \ d\lambda = \int_{\mathcal{M}_1} f \ \ d\lambda + \int_{\mathcal{M}_2} f \ \ d\lambda\,,$$
(má-li jedna strana smysl.)

- $f \in \mathcal{L}^*(\mathcal{M})$, $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ měřitelná $\implies f \in \mathcal{L}^*(\mathcal{A})$ a
$$\int_{\mathcal{A}} f \ \ \mathrm{d}\lambda = \int_{\mathcal{M}} f\chi_{\mathcal{A}} \ \ \mathrm{d}\lambda$$
Speciálně
$$\int_{\mathcal{A}} 1 \ \ \mathrm{d}\lambda = \int_{\mathcal{M}} \chi_{\mathcal{A}} \ \ \mathrm{d}\lambda = \lambda(\mathcal{A})$$

Věta 7.5 (<u>Levi.</u>) Nechť f_n, f jsou měřitelné v $\mathcal{M}$, nechť $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots \leq f_n(x) \to f(x)$ (zkráceně: $0 \leq f_n \nearrow f$) s.v. v $\mathcal{M}$. Potom
$$\int_{\mathcal{M}} f_n \ \ \mathrm{d}\lambda \to \int_{\mathcal{M}} f \ \ \mathrm{d}\lambda\,.$$

Důkaz věty 7.5 Označme $a = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathcal{M}} f_n \ \ \mathrm{d}\lambda$ - neklesající posloupnost. Potom
$$\int_{\mathcal{M}} f_n \ \ \mathrm{d}\lambda \leq \int_{\mathcal{M}} f \ \ \mathrm{d}\lambda \quad \Rightarrow \quad a \leq \int_{\mathcal{M}} f \ \ \mathrm{d}\lambda$$
opačná nerovnost: zvol g pevnou jednoduchou funkci $0 \leq g \leq f$ s.v.

dokážu $\int_{\mathcal{M}} g \ \ \mathrm{d}\lambda \leq a \Rightarrow g$ - libovolná $\ldots$ $\int_{\mathcal{M}} f \ \ \mathrm{d}\lambda \leq a$:

<u>1. krok:</u> zvolme $\tau \in (0,1)$ pevné; BÚNO $0 \leq g \leq f$, $0 \leq f_n \nearrow f$ všude v $\mathcal{M}$

označme $E_n = \{x \in \mathcal{M} : \tau g(x) \leq f_n(x)\}$

pozoruji:

1. E_n měřitelné
2. $E_{n+1} \supset E_n$
3. $\bigcup_n E_n = \mathcal{M}$

důkaz pozorování:

1. bez důkazu
2. neboť $f_n \leq f_{n+1}$
3. $$x \in \mathcal{M} \text{ libovolné: } \begin{cases} f(x) = 0 \ \Rightarrow \ g(x) = 0 \ \Rightarrow \ x \in \mathcal{M}_1 \\ f(x) > 0 \ \Rightarrow \ \tau g(x) \leq \tau f(x) < f(x) \end{cases}$$

$f_n(x) \to f(x) \ \Rightarrow \ f_n(x) \geq \tau g(x)$ pro n veliké

Nechť $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_1$ libovolná:

$$\mathcal{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathcal{A} \cap E_n)$$

Věta 6.1: $\Rightarrow \lambda(\mathcal{A}) = \lim_{n\to\infty} \lambda(A \cap E_n)$

<u>2. krok:</u>

$$g = \sum_{j=1}^{k} c_j \Xi_{\mathcal{A}_j}; \quad \text{BÚNO } \mathcal{A}_j \quad \text{disjunktní, potom}$$

$$\begin{aligned} \textstyle\int_{\mathcal{M}} f_n \ \mathrm{d}\lambda \ge \int_{E_n} f_n \ \mathrm{d}\lambda \underbrace{\ge}_{f_n \ge \tau g \text{ na } E_n} \int_{E_n} \tau g = \ & \textstyle\tau \int_{E_n} \sum_{j=1}^{mk} c_j \chi_{\mathcal{A}_j} = \\ & \textstyle\tau \int_{\mathcal{M}} \sum_{j=1}^{k} c_j \underbrace{\chi_{\mathcal{A}_j} \chi_{E_n}}_{\chi_{\mathcal{A}_j \cap E_n}} = \\ & \textstyle\tau \sum_{j=1}^{k} c_j \lambda(\mathcal{A}_j \cap E_n) \end{aligned}$$

Nechť $n \to \infty$: užiji $\lambda(\mathcal{A}_j \cap E_n) \to \lambda(\mathcal{A}_j)$. Potom ($\tau$ libovolné:)

$$a \ge \tau \sum_{j=1}^{k} c_j \lambda(\mathcal{A}_j) = \tau \int_{\mathcal{M}} g \ \mathrm{d}\lambda$$

□

Lemma 7.1 Nechť f, g jsou měřitelné a nezáporné s.v. v $\mathcal{M}$. Potom

$$\int_{\mathcal{M}} f + g \ \mathrm{d}\lambda = \int_{\mathcal{M}} f \ \mathrm{d}\lambda + \int_{\mathcal{M}} g \ \mathrm{d}\lambda$$

Důkaz lemmatu 7.1 Věta 7.4: $\exists f_n, g_n$ jednoduché:

$$\begin{aligned} 0 \le f_n \nearrow f \text{ s.v.} \\ 0 \le g_n \nearrow g \text{ s.v.} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rlll} \int_{\mathcal{M}} f_n + g_n \ \mathrm{d}\lambda = & \int_{\mathcal{M}} f_n \ \mathrm{d}\lambda & + \int_{\mathcal{M}} g_n \ \mathrm{d}\lambda & \text{věta 7.3} \\ n \to \infty & \downarrow & \downarrow \text{ Levi} & \\ & \int_{\mathcal{M}} f \ \mathrm{d}\lambda & + \int_{\mathcal{M}} g \ \mathrm{d}\lambda & \end{array}$$

$$0 \le f_n + g_n \nearrow f + g \text{ s.v.} \Rightarrow \int_{\mathcal{M}} f_n + g_n \ \mathrm{d}\lambda \to \int_{\mathcal{M}} f + g \ \mathrm{d}\lambda$$

□

Věta 7.6 (<u>Vlastnosti $\mathcal{L}(\mathcal{M})$.</u>)

1. $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}) \implies f$ je konečná s.v. v $\mathcal{M}$

2. f, $g \in \mathcal{L}(\mathcal{M})$, α, $\beta \in \mathbb{R} \implies \alpha f + \beta g \in \mathcal{L}(\mathcal{M})$ a
$$\int_{\mathcal{M}} \alpha f + \beta g \ \ \mathrm{d}\lambda = \alpha \int_{\mathcal{M}} f \ \ \mathrm{d}\lambda + \beta \int_{\mathcal{M}} g \ \ \mathrm{d}\lambda$$
3. $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}) \implies |f| \in \mathcal{L}(\mathcal{M})$ a
$$|\int_{\mathcal{M}} f \ \ \mathrm{d}\lambda| \leq \int_{\mathcal{M}} |f| \ \ \mathrm{d}\lambda$$
4. f měřitelná v $\mathcal{M}$, $|f| \leq g$ s.v. v $\mathcal{M}$, kde $g \in \mathcal{L}(\mathcal{M}) \implies f \in \mathcal{L}(\mathcal{M})$

Důkaz věty 7.6

1. $\mathcal{A} = \{x \in \mathcal{M} : f(x) = +\infty\}$
   $n \in \mathbb{N}$: $n\chi_{\mathcal{A}}$ jednoduchá, $n\chi_{\mathcal{A}} \leq f^+$
   $\Rightarrow f < +\infty$ s.v., $f > -\infty$ s.v. analogicky
2. 1. krok: $\alpha f \in \mathcal{L}(\mathcal{M})$ a $\int_{\mathcal{M}} \alpha f = \alpha \int_{\mathcal{M}} f$ ... dobrovolné domácí cvičení
   2. krok: $f + g \in \mathcal{L}(\mathcal{M})$ a $\int_{\mathcal{M}} f + g = \int f + \int g$
   $h = f + g$ - dle 1. má smysl s.v. v $\mathcal{M}$, h měřitelná - součet měřitelných funkcí
   $h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$
   $h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+ \ \Big/ \int_{\mathcal{M}}$ lemma 7.1 (pro nezáporné)
   $\int h^+ + \int f^- + \int g^- = \int h^- + \int f^+ + \int g^+ \Rightarrow \int h = \int f + \int g$
   $\int h$ konečný:
   $h^+ = (f+g)^+ \leq f^+ + g^+$
   $\int h^+ \leq \int f^+ + \int g^+ < \infty$
3. $|f| = \max\{f, -f\}$ měřitelná dle věty 7.1
   $0 \leq |f| \leq f^+ + f^-$, $\int |f| = \int f^+ + \int f^- < \infty$
   $|\int f| = |\int f^+ - \int f^-| \leq \int f^+ + \int f^- = \int |f|$
4. $|f| \leq g$ s.v. $\Rightarrow f^+ \leq g$, $f^- \leq g$ s.v.
   $\int f^+$, $\int f^- < \infty \Rightarrow f \in \mathcal{L}(\mathcal{M})$

□

Poznámka 7.5 Z (3), (4) plyne: f měřitelná: $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}) \iff |f| \in \mathcal{L}(\mathcal{M})$, tj. Lebesgueův integrál je "absolutně" konvergentní.

Věta 7.7 (<u>LEBESGUE.</u>) Nechť f_n, f jsou měřitelné v $\mathcal{M}$, $f_n \to f$ s.v. v $\mathcal{M}$. Nechť existuje $g \in \mathcal{L}(\mathcal{M})$ tak, že $|f| \leq g$ s.v. v $\mathcal{M}$. Potom
$$\int_{\mathcal{M}} f_n \ \ \mathrm{d}\lambda \to \int_{\mathcal{M}} f \ \ \mathrm{d}\lambda\,.$$

Důkaz věty 7.7 Označme $h_n(x) = 2g(x) - \sup_{k \geq n} |f_k(x) - f(x)|$; $g \geq 0$ s.v., $|f| \leq g$ s.v. Pozoruji:
h_n splní předpoklady Leviho věty: $h_n \geq 0$:
$$|f_h - f| \leq |f_h| + |f| \leq 2g$$

$h_n \leq h_{n+1}$

$$\sup_{h \geq n+1} |f_h - f| \leq \sup_{k \geq n} |f_h - f|$$

$$\sup_{h \geq n} |f_h - f| \to 0 \text{ s.v. v } \mathcal{M} \text{ pro } n \to \infty$$

Levi: $\int_{\mathcal{M}} h_n \to \int_{\mathcal{M}} 2g$

$||$

$\int_{\mathcal{M}} 2g - \int_{\mathcal{M}} \sup_{k \geq n} |f_k - f| \to \int_{\mathcal{M}} 2g \ldots$ konečné číslo

$\int_{\mathcal{M}} \sup_{k \geq n} |f_k - f| \to 0$

$$\left| \int_{\mathcal{M}} f_n - \int_{\mathcal{M}} f \right| \leq \int_{\mathcal{M}} |f_n - f| \leq \int_{\mathcal{M}} \sup_{k \geq n} |f_k - f| \to 0$$

□

Věta 7.8 (<u>Levi pro řady.</u>) Nechť f_k jsou měřitelné, s.v. nezáporné funkce v $\mathcal{M}$. Potom

$$\int_{\mathcal{M}} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} f_k \right\} \, \mathrm{d}\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathcal{M}} f_k \, \mathrm{d}\lambda \, .$$

Důkaz věty 7.8 označme $h_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ měřitelné, $h_n \geq 0$ s.v., $h_n \nearrow h = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$

Leviho věta: (V.7.5):

$$\int_{\mathcal{M}} h_n \, \mathrm{d}\lambda \to \int_{\mathcal{M}} h \, \mathrm{d}\lambda$$

$$PS = \int_{\mathcal{M}} h \, \mathrm{d}\lambda = \int_{\mathcal{M}} \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k \, \mathrm{d}\lambda$$

$$LS = \int_{\mathcal{M}} h \, \mathrm{d}\lambda = \int_{\mathcal{M}} \sum_{k=1}^{\infty} f_k \, \mathrm{d}\lambda \underset{\text{L.7.1}}{=} \int_{\mathcal{M}} f_k \, \mathrm{d}\lambda \overset{\text{z definice}}{\rightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathcal{M}} f_k \, \mathrm{d}\lambda_{\mu \to \infty}$$

□

Věta 7.9 (<u>Vztah L.i. - N.i.</u>) Nechť $f(x) \in \mathcal{C}(\mathcal{I})$, kde $\mathcal{I} \in \mathbb{R}$ je interval. Jestliže

buď (1) $f \geq 0$ v $\mathcal{I}$ (varianta $f \leq 0$ v $\mathcal{I}$)

nebo (2) $\int_{\mathcal{I}} f < +\infty$.

Potom

$$(\mathcal{N}) \int_{\mathcal{I}} f = (\mathcal{L}) \int_{\mathcal{I}} f \qquad (*)$$

Důkaz věty 7.9 Nechť a, b jsou krajní body. Zvolme $x_0 \in \mathcal{I}$ pevně. Definuji si:

$$F(x) := \begin{cases} (\mathcal{L}) \int_{(x_0,x)} f & \text{pro } x \in [x_0, b) \\ -(\mathcal{L}) \int_{(x,x_0)} f & \text{pro } x \in (a, x_0) \end{cases}$$

Jelikož $f \in \mathcal{C}([x_0, x])$ & $x \in (a, b)$, pak je omezená, $\Rightarrow F(x)$ je definovaná a konečná.

Klíčové pozorování: $F'(x) = f(x)$ pro $\forall x \in (a, b)$

důkaz: stejně jako pro R.i.:

$$\frac{1}{t}[F(x+t) - F(x)] = \frac{1}{t}(\mathcal{L}) \int_x^{x+t} f(s)\, \mathrm{d}s \to f(x) \quad \ldots \text{ze spojitosti } f$$

$x \in [x_0, b) : (\mathcal{N}) \int_{x_0}^{x} f = F(x) - F(x_0) = (\mathcal{L}) \int_{(x_0,x)} b \big/ x \to b-$
$(\mathcal{N}) \int_{x_0}^{b} f = F(b-) - F(x_0)$

Otázka: Jestli $(\mathcal{L}) \int_{(x_0,x)} f \to (\mathcal{L}) \int_{(x_0,b)} f$ pro $x \to b-$?

Heineho věta: $(\Phi(x) \to A$ pro $x \to \alpha) \Leftrightarrow$ pro každou $\{x_n\}_n$: $x_n \to x$, $x_n \neq \alpha$ $\forall n$, platí $\Phi(x_n) \to A$.

Stačí: $x_n \to b$; $x_n < b$ $\forall n$: $(\mathcal{L}) \int_{x_0,x)} f \to (\mathcal{L}) \int_{x_0,b)} f$;

Označme

$$f_n = f \cdot \chi_{(x_0,x_n)}.$$

Potom

$$(\mathcal{L}) \int_{(x_0,x_n)} f = (\mathcal{L}) \int_{(x_0,b)} f_n; \quad f_n \to f \text{ s.v. v } (x_0, b)$$

Zbývá:

$$(\mathcal{L}) \int_{(x_0,b)} f_n \to (\mathcal{L}) \int_{(x_0,b)} f \qquad (**)$$

Případ 1: $f \geq 0 \Rightarrow 0 \leq f_n \nearrow f$

BÚNO: $x_n \nearrow b$ (zobecnění Heineho věty)

$(**)$ platí dle Leviho věty.

Případ 2: $\int_{\mathcal{I}} |f| < \infty \Rightarrow |f_n| \leq f \in \mathcal{L}(x_0, b)$

$(**)$ platí dle Lebesgueovy věty

□

Úmluva značení 7.2 Neřekneme-li jinak, chápeme každý integrál jako Lebesgueův.

Poznámka 7.6

- Díky bodu (1) je jedno, ověříme-li podmínku integrovatelnosti v bodě (2) pro Newtonův nebo pro Lebesgueův integrál.
- $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ má Newtonův, nemá Lebesgueův integrál v $(0, +\infty)$.

Věta 7.10 (<u>Lebesgueova věta pro řady.</u>) Nechť f, f_k jsou měřitelné v M, nechť $\sum_{k=1}^{\infty} f_k = f$ s.v. v M. Nechť existuje $g \in \mathcal{L}(M)$ tak, že

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} f_k \right| \leq g.$$

Pak

$$\int_M f = \sum_{k=1}^{\infty} \int_M f_k.$$

Důkaz věty 7.10 - převedením na V.7.7:

Označme:

$$h_n = \sum_{k=1}^{n} f_k;$$

z předpokladů:

- $h_n \to f$ s.v.
- $|h_n| \leq g \in \mathcal{L}(M)$

V.7.7 $\Rightarrow \int_M h_n \to f$ pro $n \to \infty$

leč:

$$\int_M h_n = \int_M \sum_{k=1}^{n} f_k \underset{\text{V.7.6}}{=} \sum_{k=1}^{n} \int_M f_k \to \int_M f \quad \text{pro } n \to \infty,$$

q.e.d.

□

Poznámka 7.7 Nalezení majoranty g v předchozí větě:

- pokud $f_k = (-1)^k h_k$, kde $h_k \searrow 0$, lze volit $g = h_1$ (teleskopický efekt).
- vždy lze volit $g = \sum_k |f_k|$; integrovatelnost g ověřím pomocí Věty 7.8.

Příklad 7.4

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1-(-x)} = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k \underset{\text{záměna } \sum \text{ a } \int}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 (-1)^k x^k \, \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1},$$

kde
$$\frac{1}{1-q} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k; \quad |q| < 1$$
Tedy
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$
Ověření záměny sumy a integrálu: $f_k(x) = (-1)^k x^k$ ... Levi <u>ne</u>

TRIK: pozoruji:
$$f_k(x) = (-1)^k g_k(x); \quad g_k(x) \searrow 0 \quad \text{pro s.v. } x \in (0,1) \text{ a pro } k \to +\infty$$
Teleskopický efekt:
$$g_0(x) = x^0 = 1 \in \mathcal{L}((0,1))$$
$$\Rightarrow \left| \sum_{k=0}^{n} (-1)^k g_k(x) \right| \leq |g_0(x)| \quad \forall x$$

Příklad 7.5
$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} \cos\sqrt{x} \ \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^k \mathrm{e}^{-x} \ \mathrm{d}x = \qquad (\oplus)$$
Tedy víme:
$$|f(x)| = \mathrm{e}^{-x} \in \mathcal{L}((0,+\infty))$$
$$(\mathcal{L}) \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} = (\mathcal{N}) \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} = [-\mathrm{e}^{-x}]_0^{+\infty} = 1$$
$$\cos y = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!}$$
$$(\oplus) \qquad \underset{\text{záměna } \sum \text{ a } \int}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \underbrace{\int_0^{+\infty} x^k \mathrm{e}^{-x} \ \mathrm{d}x}_{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} k!$$
záměna:
$$f_k(x) = \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^k \mathrm{e}^{-x}$$
trik:
$$\left| \sum_{k=0}^{n} f_k \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |f_k| = g$$
Zdalipak je $g \in \mathcal{L}((0,+\infty))$?
$$\int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |f_k| \underset{\text{Levi - V.7.8}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{+\infty} |f_k| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(2k)!} < +\infty \quad \text{konverguje dle podílového kritéria}$$

Poznámka 7.8 Integrály závislé na parametru:

$$F(a) = \int_M f(x,a)\ \mathrm{d}x$$

Otázky:

- $f(x,a)$ spojitá vůči $a \overset{?}{\Rightarrow} F(a)$ spojitá?
- $F(x,a) = \frac{\partial}{\partial a}\int_M f(x,a)\ \mathrm{d}x \overset{?}{=} \int_M \frac{\partial}{\partial a} f(x,a\ \mathrm{d}x)$?

Značení:

- $f(\dot{,}a)$: pro pevné a studuji $f(x,a)$ jako funkci proměnné x
- $f(x,\dot{)}$: pro pevné x studuji $f(x,a)$ jako funkci proměnné a

Věta 7.11 (<u>SPOJITOST INTEGRÁLU VŮČI PARAMETRU.</u>) Nechť $f(x,a) : M \times \mathcal{I} \to \mathbb{R}$, kde $M \subset \mathbb{R}$ je měřitelná, $\mathcal{I}$ je interval.Nechť

1. pro každé $a \in \mathcal{I}$ je $f(\cdot,a)$ měřitelná v M,
2. pro s.v. $x \in M$ je $f(x,\cdot)$ spojitá v I
3. $\exists g(x) \in \mathcal{L}(M)$ tak, že $|f(x,a)| \le g(x)$ pro s.v. $x \in M$ a pro každé $a \in \mathcal{I}$.

Potom

$$F(a) = \int_M f(x,a)\ \mathrm{d}x \quad \text{je spojitá v } \mathcal{I}.$$

Důkaz věty 7.11 Poznámka: (3) $\Rightarrow |f(\cdot,a)| \le g(\cdot)$ pro $\forall a \in \mathcal{I} \Rightarrow F(a)$ je definovaná a konečná v $\mathcal{I}$.

spojitost:

$$\lim_{a \to a_0} F(a) = F(a_0); \quad a_0 \in \mathcal{I} \text{ libovolné pevné}$$

Heine: stačí ukázat: $a_n \to a_0$ & $a_n \neq a_0 \Rightarrow F(a_n) \to F(a_0)$

nyní: $f(x,a_n) \to f(x,a_0)$ pro s.v. $x \in M$ (dle (2) Heineho)

označ: $f_n(x) = f(x,a_n)$;

dle (3): $|f_n(x)| \le g(x)$ pro s.v. $x \in M$.

Lebesgueova věta:

$$\underbrace{\int_M f_n(x)\ \mathrm{d}x}_{=F(a_n)} \to \underbrace{\int_M f(x,a_0)\ \mathrm{d}x}_{=F(a_0)} \quad \text{pro } n \to \infty$$

□

Příklad 7.6

$$F(a) = \int_0^{+\infty} \underbrace{\mathrm{e}^{-x\sin(ax)}}_{f(x,a)} \,\mathrm{d}x$$

Věta 7.11: $M = (0, +\infty)$, $\mathcal{I} = \mathbb{R}$

1. $f(\dot{,}a)$ měřitelná (ze spojitosti)
2. $f(x, \dot{)}$ spojitá
3. $|f(x,a)| \leq g(x) \in \mathcal{L}(0, +\infty)$

   $|\mathrm{e}^{-x}\sin(ax)| \leq \mathrm{e}^{-x} = g(x) \in \mathcal{L}(0, +\infty)$

$\Rightarrow$ $F(a) \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$

Věta 7.12 (<u>Derivace integrálu dle parametru.</u>) Nechť $f(x,a) : M \times \mathcal{I} \to \mathbb{R}$, kde $M \subset \mathbb{R}$ je měřitelná, $\mathcal{I}$ je otevřený interval.Nechť

1. pro každé $a \in \mathcal{I}$ je $f(\cdot, a)$ měřitelná v M,
2. pro s.v. $x \in M$ existuje vlastní $\frac{\partial f}{\partial a}(x,a)$ v celém $\mathcal{I}$
3. $\exists g(x) \in \mathcal{L}(M)$ tak, že $|\frac{\partial f}{\partial a}(x,a)| \leq g(x)$ pro s.v. $x \in M$ a pro každé $a \in \mathcal{I}$.
4. $\exists a_0 \in \mathcal{I}$ tak, že $f(\cdot, a_0) \in \mathcal{L}(M)$.

Potom

(i)
$$F(a) = \int_M f(x,a) \,\mathrm{d}x \quad \text{je definována a konečná } \forall a \in \mathcal{I}.$$

(ii)
$$F'(a) = \int_M \frac{\partial f}{\partial a}(x,a) \,\mathrm{d}x \quad \text{platí všude v } \mathcal{I}.$$

Důkaz věty 7.12 (i): zvol $a \in \mathcal{I}$ pevné; cíl: $f(x,a) \in \mathcal{L}(M)$. Dle (2), Lagrangeova věta:

$$f(x,a) = f(x,a_0) + (a - a_0) \underbrace{\frac{\partial f}{\partial a}(x,a)}_{|\frac{\partial f}{\partial a}(x,a)| \leq g(x)} \quad \text{pro s.v. } x \in M$$

Nechť $\alpha = \alpha(x, a, a_0)$, kde α je mezi a, a_0.

dle (3)
$$\underbrace{|f(x,a)|}_{\in\mathcal{L}(M)} \leq \underbrace{|f(x,a_0)|}_{\in\mathcal{L}(M)} + |a - a_0| \cdot \underbrace{g(x)}_{\in\mathcal{L}(M)}$$

(ii) $a \in \mathcal{I}$ pevné: cíl:

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[F(a+t) - F(a)] = \underbrace{\int_M \frac{\partial f}{\partial a}(x,a)\ \mathrm{d}x}_{A}$$

Heineho věta: stačí $t_n \to 0$, $t_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ libovolné (t_n) platí:

$$\frac{1}{t_n}[F(a+t_n) - F(a)] \to A$$

$$\frac{1}{t_n}[F(a+t_n) - F(a)] = \int_M \underbrace{\frac{1}{t_n}[f(x,a+t_n) - f(x,a)]}_{h_n(x)}\ \mathrm{d}x$$

Pozorování: dle (2) pro s.v. $x : h_n(x) \to \frac{\partial f}{\partial a}(x,a)$

Majoranta:

$$h_n(x) = \frac{\partial f}{\partial a}(x,\beta),$$

kde $\beta = \beta(n,x,a)$ leží mezi $a, a+t_n$ pro s.v. $x \in M$

dle (3)

$$|h_n(x)| \leq g(x) \ \text{ pro s.v. } x \in M;\ g(x) \in \mathcal{L}(M).$$

Lebesgue:

$$\int_M h_n(x) \to \int_M \frac{\partial f}{\partial a}(x,a) = A.$$

$\square$

Příklad 7.7

$$F(a) = \int_0^{+\infty} \underbrace{\mathtt{e}^{-ax}}_{f(x,a)} = \frac{1}{a} \qquad \forall a \in (0,+\infty) = \mathcal{I}, \quad M = (0,+\infty)$$

Aplikace Věty 7.12:

1. $f(\dot{,}a)$ měřitelná $\forall a \in \mathcal{I}$ spojitá
2. $\frac{\partial f(x,a)}{\partial a} = -x\mathtt{e}^{-ax}$ $\forall x \in M$, $\forall a \in \mathcal{I}$
3. Zdalipak $g(x) = \sup_{a\in\mathcal{I}} |-x\mathtt{e}^{-ax}| = x \notin \mathcal{L}(M)$?

   Zvol: $\mathcal{I} = (\eta,+\infty)$; $\eta > 0$ pevné

   $$g(x) = \sup_{a>\eta} |-x\mathtt{e}^{-ax}| = x\mathtt{e}^{-\eta x} \in \mathcal{L}(0,+\infty)$$

4. $\exists\ a_0 \in \mathcal{I}$; $f(\dot{,}a) \in \mathcal{L}(M)$

   zvol např. $a_0 = \eta + 1$

`Věta 7.12:`

$$\frac{-1}{a^2} = F'(a) = \int_0^{+\infty} (-x)\mathtt{e}^{-ax} \ \mathtt{d}x$$

`Tedy`

$$\frac{1}{a^2} = F'(a) = \int_0^{+\infty} (x)\mathtt{e}^{-ax} \ \mathtt{d}x \quad \forall a > \eta$$

η `libovolné` $\Rightarrow \forall a > 0$ `Další derivace` $F(a)$`:`

$$F''(a) = \int_0^{+\infty -x^2\mathtt{e}^{-ax}} \ \mathtt{d}x$$

$$\vdots$$

$$F^{(k)}(a) = \int_0^{+\infty (-x)^k\mathtt{e}^{-ax}} \ \mathtt{d}x$$

$$F^{(k)}(a) = \tfrac{a^k}{ka^k}\{a^{-1}\} = \underbrace{(-1)(-2)\dots(-k)}_{(-1)^k k!} \cdot a^{-k+1}$$

`Tedy`

$$\frac{k!}{a^{k+1}} = \int_0^{+\infty} x^k\mathtt{e}^{-ax} \ \mathtt{d}x \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall a > 0.$$

Poznámka 7.9 [Gamma funkce.] Pro $s > 0$ definujeme

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1}\exp(-x) \ \mathrm{d}x$$

Platí:

- $\Gamma(n) = (n-1)!$ pro $\forall n \in N$
- $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ pro $\forall s > 0$
- $\Gamma(s)$ je spojitá a ryze konvexní v $(0, \infty)$
- $\Gamma(0+) = \Gamma(+\infty-) = +\infty$
- $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

Poznámka 7.10 [Hlavní hodnota integrálu.]

- Funkci $1/x$ nelze integrovat přes $(-1, 2)$ dle žádné dosavadní definice integrálu
- problém v okolí 0, je zde však symetrie - definuji tzv. Cauchyho hlavní hodnotu (*la valeur principale*) jako

$$v.p.\int_{-1}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{(-1,2)\setminus(-\epsilon,\epsilon)} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln 2.$$

- podobně definuji

$$v.p.\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\ \mathrm{d}x = \lim_{K\to\infty}\int_0^K \frac{\sin x}{x}\ \mathrm{d}x = (N)\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\ \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

Definice 7.6 (<u>Integrál komplexní funkce.</u>)
Nechť je $M \subset \mathbb{R}$ měřitelná, nechť $f(x) : M \to \mathbb{C}$, tj. lze psát

$$f(x) = f_1(x) + i f_2(x),$$

$f(x)$ je měřitelná, pokud $f_1(x), f_2(x)$ jsou měřitelné a definuji

$$\int_M f\ \ \mathrm{d}\lambda = \int_M f_1\ \ \mathrm{d}\lambda + i\int_M f_2\ \ \mathrm{d}\lambda.$$

Kapitola 8

Lebesgueův integrál v $\mathbb{R}^n$

Pojmy v této kapitole: Difeomorfismus, Jakobián, unitární matice. Věta o zavedení Lebesgueovy míry v $\mathbb{R}^n$, Fubiniho věta, věta o substituci.

Poznámka 8.1 [Zavedení Lebesgueovy míry v $\mathbb{R}^n$.]

- $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}^n$ je interval, pokud $\mathcal{I} = \mathcal{I}^1 \times \mathcal{I}^2 \times \cdots \times \mathcal{I}^n$, kde $\mathcal{I}^k \subset \mathbb{R}$ jsou intervaly
- objem intervalu $|\mathcal{I}| = |\mathcal{I}^1| \cdot |\mathcal{I}^2| \cdot \cdots \cdot |\mathcal{I}^n|$ (úmluva $0 \cdot \infty = 0$)
- příklady:

$$\begin{aligned} &\mathcal{I}_1 = \{(x,y) : \ 0 < x < 1, \ 0 < y < 2\}, \qquad |\mathcal{I}_1| = 2 \\ &\mathcal{I}_2 = \{(x,0) : \ x \in \mathbb{R}\}, \qquad |\mathcal{I}_2| = 0 \\ &\mathcal{I}_3 = \{(x,y,0) : \ x \in \mathbb{R}, \ y \in \mathbb{R}\} \qquad |\mathcal{I}_3| = 0 \end{aligned}$$

- vnější míra v $\mathbb{R}^n$: pro $A \subset \mathbb{R}^n$ definuji

$$\lambda_n^*(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\mathcal{I}_k| : \ \mathcal{I}_k \subset \mathbb{R}^n \text{ otevř. int.}, \ A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{I}_k \right\}$$

- množina $A \subset \mathbb{R}^n$ se nazve měřitelná podle Carathéodoryho, pokud

$$\lambda_n^*(T) = \lambda_n^*(T \cap A) + \lambda_n^*(T \setminus A)$$

  platí pro libovolnou "testovací" množinu $T \subset \mathbb{R}^n$.

Věta 8.1 (<u>Zavedení Lebesgueovy míry v $\mathbb{R}^n$.</u>) Označ

$$\mathcal{M}_n = \{A \subset \mathbb{R}^n : \ A \text{ je měřitelná dle Carathédoryho}\}$$

Potom $\mathcal{M}_n$ je σ-algebra a $\lambda_n = \lambda_n^*|_{\mathcal{M}_n}$ je míra. Terminologie:

λ_n...Lebesgueova (n-rozměrná) míra v $\mathbb{R}^n$,

$\mathcal{M}_n$...Lebesgueovsky měřitelné (λ_n-měřitelné) množiny v $\mathbb{R}^n$.

Dále platí:

(1) $N \subset \mathbb{R}^n$ je spočetná $\Longrightarrow$ $N \in \mathcal{M}_n$ a $\lambda_n(N) = 0$

(2) $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}^n$ je interval $\Longrightarrow$ $\mathcal{I} \in \mathcal{M}_n$ a $\lambda_n(\mathcal{I}) = |\mathcal{I}|$

(3) $A \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená nebo uzavřená $\Longrightarrow$ $A \in \mathcal{M}_n$

(4) λ_n je translačně a rotačně invariantní (nemění se posunutím a otočením)

Důkaz věty 8.1 Vynecháváme, neboť je podobný situaci $n = 1$.

□

Poznámka 8.2 [Zavedení Lebesgueova integrálu v $\mathbb{R}^n$.]

- analogicky (formálně stejnou definicí) jako v $\mathbb{R}$ definuji jednoduchou funkci a její integrál
- funkci $f(x) : M \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^*$ nazvu měřitelnou, pokud

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R})\,[\{x \in M : \ f(x) > \alpha\} \in \mathcal{M}_n]$$

- integrál nezáporné měřitelné funkce: supremum integrálů jednoduchých funkcí
- integrál obecné měřitelné funkce: rozdíl integrálu kladné a záporné části (má-li smysl).
- značení a terminologie: pro funkci $f(x) : M \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^*$

$$\int_M f \ \mathrm{d}\lambda_n \qquad \text{nebo} \qquad \int_M f \ \mathrm{d}x$$

  pro $n = 2, 3$ píší místo $\mathrm{d}\lambda_2$ tradičně $\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$, místo $d\lambda_3$ potom $\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$. $\mathcal{L}^*(\lambda_n, M)$... funkce, pro něž integrál existuje (i nekonečný) $\mathcal{L}(\lambda_n, M)$... funkce, pro něž existuje konečný integrál
- pro integrál v $\mathbb{R}^n$ platí mnoho analogií s integrálem v $\mathbb{R}$, např. Leviho a Lebesgueova věta
- selhává souvislost s Newtonovým integrálem, který je pouze jednorozměrný

Věta 8.2 (<u>Fubini.</u>) Nechť $M \subset \mathbb{R}^{n+m}$ je λ_{n+m}-měřitelná, $f(x,y) : M \to \mathbb{R}^*$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$. Nechť $f \in \mathcal{L}^*(\lambda_{n+m}, M)$. Označme pro $x \in \mathbb{R}^n$

$$M^x = \{y \in \mathbb{R}^m : \ (x,y) \in M\}$$

Potom

(1) pro s.v. $x \in \mathbb{R}^n$ je $M^x \in \mathcal{M}_m$ a $f(x,\cdot) \in \mathcal{L}^*(\lambda_m, M^x)$

(2) označíme-li

$$g(x) = \int_{M^x} f(x,\cdot)\ \mathrm{d}\lambda_m\,,$$

je $g(x) \in \mathcal{L}^*(\lambda_n, \mathbb{R}^n)$ a platí

$$\int_M f \, \mathrm{d}\lambda_{n+m} = \int_{\mathbb{R}^n} g \, \mathrm{d}\lambda_n$$

neboli

$$\int_M f(x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ \int_{M^x} f(x,y) \, \mathrm{d}y \right\} \, \mathrm{d}x \, .$$

Důkaz věty 8.2 Vynecháváme.

□

Poznámka 8.3

- místo $\int_{\mathbb{R}^n} \ldots \, \mathrm{d}x$ lze psát $\int_{\Pi^n(M)} \ldots \, \mathrm{d}x$, kde

  $$\Pi^n(M) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ (\exists y \in M)[(x,y) \in M]\}$$

  je projekce M na $\mathbb{R}^n$ - ovšem za předpokladu, že $\Pi^n(M)$ je měřitelná, což obecně neplyne z měřitelnosti M.

- role x, y symetrická, tj. platí

  $$\int_M f(x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^m} \left\{ \int_{M^y} f(x,y) \, \mathrm{d}x \right\} \, \mathrm{d}y \, ,$$

  kde $M^y = \{x \in \mathbb{R}^n : \ (x,y) \in M\}$.

- předpoklad $f \in \mathcal{L}^*(\lambda_{n+m}, M)$ je podstatný: $f(x,y) : (0,\infty)^2 \to \mathbb{R}$ definuji jako 1 pokud $-1 < y - x < 0$, jako -1 pokud $0 < y - x < 1$ a nula jinde. Potom

  $$\int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty f(x,y) \, \mathrm{d}y \right\} \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{2} \neq \frac{1}{2} = \int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty f(x,y) \, \mathrm{d}x \right\} \, \mathrm{d}y$$

  Snadno nahlédnu, že $f \notin \mathcal{L}^*((0,\infty)^2)$.

- předpoklad $f \notin \mathcal{L}^*(\lambda_{n+m}, M)$ je určitě splněn, pokud buď (i) f nemění znamení nebo (ii) $\int_M |f| \, \mathrm{d}\lambda_{n+m} < \infty$. Bod (ii) lze jiľ ověřit Fubiniho větou (integruji nezápornou funkci), speciálně je splněn, pokud M je omezená množina a f na M je omezená.

- speciální tvar Fubiniho věty ($f \equiv 1$): pro $M \in \mathcal{M}_{n+m}$ platí

  $$\lambda_{n+m}(M) = \int_M 1 \, \mathrm{d}\lambda_{n+m} = \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ \int_{M^x} 1 \, \mathrm{d}\lambda_m \right\} \, \mathrm{d}\lambda_n = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda_m(M^x) \, \mathrm{d}\lambda_n$$

Příklad 8.1 `Počítejte`

$$\int_M |x| \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y; \qquad M = \{x^2 + y^2 < 1\}.$$

Je patrné, že M je měřitelná (otevřená).

$f = |x|$ je měřitelná (spojitá), $f \in \mathcal{L}^*(\lambda_2, M)$ ... nemění znaménko

Tedy

$$\int_M |x| \ \mathtt{d}x \ \mathtt{d}y = \int_{\mathbb{R}} \left\{ \int_{M^x} |x| \ \mathtt{d}y \right\} \ \mathtt{d}x = \int_{-1}^{1} \left\{ \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} |x| \ \mathtt{d}y \right\} \ \mathtt{d}x = \ (\otimes)$$

$$M^x = \begin{cases} \emptyset, & |x| \geq 1 \\ (-\sqrt{1-x^2}, +\sqrt{1-x^2}), & x \in (-1,1) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (\otimes) &= \int_{-1}^{1} 2\sqrt{1-x^2}|x| \ \mathtt{d}x = 2\int_0^1 2\sqrt{1-x^2} \underbrace{|x| \ \mathtt{d}x}_{\mathtt{d}t} \Big|_{x^2=t} = \\ &= 2\int_0^1 \sqrt{1-t} \ \mathtt{d}t = -2\left[\tfrac{2}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \tfrac{4}{3} \end{aligned}$$

Příklad 8.2 Počítejte

$$\int_0^{+\infty} \mathtt{e}^{-x} \frac{\sin(bx) - \sin(ax)}{x} \ \mathtt{d}x =$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{+\infty} \mathtt{e}^{-x} [\sin(xy)]_{y=a}^{y=b} \ \mathtt{d}x \\ &= \int_0^{+\infty} \mathtt{e}^{-x} \tfrac{1}{x} \left(\int_a^b \cos(xy) x \ \mathtt{d}y \right) \ \mathtt{d}x \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\int_a^b \mathtt{e}^{-x} \cos(xy) \ \mathtt{d}y \right) \ \mathtt{d}x \\ &= \int_M \mathtt{e}^{-x} \cos(xy) \ \mathtt{d}x \ \mathtt{d}y \Big|_{M=(0,+\infty)\times(a,b)} \\ &= \int_a^b \left(\int_0^{+\infty} \mathtt{e}^{-x} \cos(xy) \ \mathtt{d}x \right) \ \mathtt{d}y \\ &= \int_a^b \tfrac{1}{1+y^2} \ \mathtt{d}y \\ &= \mathtt{arctg} \ b - \mathtt{arctg} \ a \end{aligned}$$

Tedy

$$\int_M |f| \ \mathtt{d}x \ \mathtt{d}y = \int_M |\mathtt{e}^{-x} \cos(xy)| \ \mathtt{d}x \ \mathtt{d}y \leq \int_M \mathtt{e}^{-x} \ \mathtt{d}x \ \mathtt{d}y$$

Lze užít F.v.: BÚNO $b > a$:

$$= \int_0^{+\infty} \left(\int_{(a,b)} \mathtt{e}^{-x} \ \mathtt{d}y \right) \ \mathtt{d}x = (b-a) \int_0^{+\infty} \mathtt{e}^{-x} \ \mathtt{d}x = (b-a) < +\infty.$$

Příklad 8.3 Objem kužele: kužel je orientován tak, že jeho hlavní osa je totožná s osou z, stojí na špičce.

$$\lambda_3(K) = \int_K 1 \ \mathtt{d}\lambda_3 \underbrace{=}_{\mathtt{F.v.}:n=1,m=2} \int_0^v \left(\int_{M^z} 1 \ \mathtt{d}\lambda_2 \right) \ \mathtt{d}z$$

$$\lambda_2(M^z) = \lambda_2(P)\frac{z^2}{v^2},$$

`kde` M^z `je posunutá` P `a škálovaná faktorem` $\frac{z}{v}$.

$$\int_0^v \lambda_2(M^z)\ \mathtt{d}z = \int_0^v \frac{z^2}{v^2}\lambda_2(P)\ \mathtt{d}z = \frac{1}{3}v|P|.$$

Poznámka 8.4 [Věta o substituci pro Newtonův integrál.]

Pokud $\phi(y) : (\alpha, \beta) \to (a, b)$ je prostá, na, spojitě diferencovatelná a $\phi'(y) \neq 0$, platí

$$\int_a^b f(x)\,dx = \pm \int_\alpha^\beta f(\phi(y))\phi'(y)\ \mathrm{d}y = \int_\alpha^\beta f(\phi(y))|\phi'(y)|\ \mathrm{d}y$$

(pokud má jeden z integrálů smysl) kde $\pm$ je podle toho, zda ϕ roste nebo klesá.

Definice 8.1 (<u>DIFEOMORFISMUS.</u>)
Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina. Funkce $\phi(x) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ se nazve difeomorfismus, pokud

(1) ϕ je prostá na Ω

(2) $\phi \in C^1(\Omega)$

(3) matice $\nabla\phi(x)$ je regulární pro $\forall x \in \Omega$

Poznámka 8.5 z definice difeomorfismu plyne: $M = \phi(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a $\phi^{-1}(y) : M \to \Omega$ je též difeomorfismus

Definice 8.2 (<u>JAKOBIÁN.</u>)
Pro $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definujeme JAKOBIÁN

$$\mathrm{J}\phi = \mathrm{J}\phi(x) = \det \nabla\phi(x).$$

Věta 8.3 (<u>O SUBSTITUCI.</u>) Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $\phi(y) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ je difeomorfismus. Nechť $f(x) : \phi(\Omega) \to \mathbb{R}^*$. Potom

$$\int_{\phi(\Omega)} f(x)\ \mathsf{d}x = \int_\Omega f(\phi(y))|\mathsf{J}\phi(y)|\ \mathsf{d}y$$

neboli

$$\int_{\Phi(\Omega)} f\ \mathsf{d}\lambda_n = \int_\Omega f \circ \phi\,|\mathsf{J}\phi|\ \mathsf{d}\lambda_n$$

má-li jedna strana smysl.

Důkaz věty 8.3 Vynecháváme.

□

Poznámka 8.6 Speciální tvar pro $f \equiv 1$:

$$\lambda_n(\phi(\Omega)) = \int_{\Phi(\Omega)} 1 \ \mathrm{d}x = \int_{\Omega} |\mathrm{J}\phi(y)| \ \mathrm{d}y$$

Příklad `8.4`

$$I = \int_R \mathtt{e}^{-x^2} \ \mathtt{d}x = \sqrt{\pi}$$

`Trik: budu počítat` I^2`:`

$$\begin{aligned} I^2 &= \left(\int_{\mathbb{R}} \mathtt{e}^{-x^2} \ \mathtt{d}x\right)\left(\int_{\mathbb{R}} \mathtt{e}^{-y^2} \ \mathtt{d}y\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathtt{e}^{-x^2}\left(\int_{\mathbb{R}} \mathtt{e}^{-y^2} \ \mathtt{d}y\right) \ \mathtt{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} \mathtt{e}^{-x^2-y^2} \ \mathtt{d}y\right) \ \mathtt{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}}^2 \mathtt{e}^{-x^2-y^2} \ \mathtt{d}y \ \mathtt{d}x \end{aligned}$$

`Substituce:`

$$\begin{aligned} &\phi : (r,\varphi) \mapsto (x,y) \\ &x = \cos\varphi \\ &y = \sin\varphi \\ &\Omega = (0,+\infty) \times (0,2\pi) \end{aligned}$$

`Tedy:`

$$\phi(\Omega) = \mathbb{R}^2 \setminus \underbrace{\{(x,0 : x \geq 0)\}}_{P}, \quad \mathtt{ale} \ \lambda_2(P) = 0$$

`Počítejme:`

$$\nabla\phi = \begin{pmatrix} \cos\varphi, & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi, & -r\cos\varphi \end{pmatrix}, \qquad \mathtt{J} = r$$

`Tak`

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}}^2 \mathtt{e}^{-x^2-y^2} \ \mathtt{d}y \ \mathtt{d}x &= \int_{\phi(\Omega)} \mathtt{e}^{-x^2-y^2} \ \mathtt{d}x \ \mathtt{d}y \\ &= \int_{(0,\infty)\times(0,2\pi)} \\ &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{+\infty} \mathtt{e}^{-r^2} r \ \mathtt{d}r\right) \ \mathtt{d}\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} [-\tfrac{1}{2}\mathtt{e}^{-r^2}]_{r=0}^{r=+\infty} \ \mathtt{d}\varphi \\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} \ \mathtt{d}\varphi = \pi = I^2 \end{aligned}$$

`Tedy:`

$$\boxed{\int_R \mathtt{e}^{-x^2} \ \mathtt{d}x = \sqrt{\pi}.}$$

Příklad 8.5 `Objem množiny:`

$$M = \begin{cases} |x+y+z| < 1 \\ |x+y-z| < 1 \\ |x-y+z| < 1 \end{cases}$$

`Substituce:`

$$\begin{aligned} u &= x+y+z \\ v &= x+y-z \\ w &= x-y+z \end{aligned}$$

`Tedy`

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det A = 1 \cdot 0 - 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) = 4 \Rightarrow$ `vzájemně jednoznačné zobrazení` $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

$$\Psi : (x,y,z) \to (u,v,w) \quad \texttt{v} \ \mathbb{R}^3$$

`Substituce:`

$$\phi : (u,v,w) \to (x,y,z) : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

$$\phi : \Omega \to M, \qquad \Omega = (-1,1)^3$$

$$\lambda_3(M) = \int_M 1 \ \mathtt{d}\lambda_3 = \int_{\phi(\Omega)} 1 \ \mathtt{d}\lambda_3 \overset{=}{\texttt{V.8.3}} \int_\Omega |\mathtt{J}\phi| \ \mathtt{d}\lambda_3 = \int_\Omega \frac{1}{4} \ \mathtt{d}\lambda_3 = \frac{1}{4}\lambda_3(\Omega) = \underline{\underline{2}}$$

Poznámka 8.7 [n-rozměrná míra koule v $\mathbb{R}^n$.] Označme

$$\begin{aligned} B_{\mathbb{R}^n}(0,r) &= \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x\| < r\} \\ \alpha_n &= \lambda_n(B_{\mathbb{R}^n}(0,1)) \end{aligned}$$

kde $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$. Potom platí

$$\lambda_n(B_{\mathbb{R}^n}(0,r)) = \alpha_n r^n$$

$$\alpha_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}$$

Příklad 8.6 `Plocha útvaru:`

$$M = \begin{cases} 1 < x+y < 2 \\ 2x < y < 3x \end{cases}$$

$$\lambda_2(M) = \int_M \ \mathtt{d}\lambda_2$$

`substituce:`

$$u = x+y, v = \frac{y}{x}.$$

`Potom:`

$$1 < u < 2,$$
$$2 < v < 3$$
$$\Omega = (1,2) \times (2,3)$$

`Nechť`

$$\phi \begin{cases} x = \frac{u}{1+v} \\ y = \frac{uv}{1+v} \end{cases}$$

`substituce:`

$$\phi : (u,v) \to (x,y)$$

`Počítejme:`

$$\nabla\phi = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+v}, & \frac{-u}{(1+v)^2} \\ \frac{v}{1+v}, & \frac{u}{(1+v)^2} \end{pmatrix}, \qquad \mathtt{J}\phi = \frac{u}{(1+v)^3} + \frac{uv}{(1+v)^3} = \frac{u}{(1+v)^2}$$

`Tedy`

$$\begin{aligned} \lambda_2(M) &= \int_M \ \mathtt{d}\lambda_2 = \\ &= \int_\Omega \frac{u}{(1+v)^2} \ \mathtt{d}u \ \mathtt{d}v \\ &= \int_1^2 \left(\int_2^3 \frac{u}{(1+v)^2}\right) \ \mathtt{d}u \\ &= -\int_1^2 \left[\frac{u}{1+v}\right]_{v=2}^{v=3} \ \mathtt{d}u \\ &= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \int_1^2 u \ \mathtt{d}u \\ &= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \left[\frac{u^2}{2}\right]_1^2 \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Poznámka 8.8 (1) $\phi(x) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ je difeomorfismus, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená:

$$\int_{\phi(\Omega)} f(y)\ \mathrm{d}y = \int_\Omega f[f(x)]|\mathrm{J}\phi(x)|\ \mathrm{d}x; \quad \forall f : \phi(\Omega) \to \mathbb{R}^*$$

<u>SFÉRICKÉ SOUŘADNICE:</u>

$$\phi \begin{cases} x = r\cos u \cos v \\ y = r \sin u \cos v \\ z = u \sin v \end{cases},$$

kde u je zeměpisná šířka a v je zeměpisná délka

$\Rightarrow$ tím se popíše celý Ω:

$$\Omega : r \in (0,\infty); u \in (0,2\pi); v \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$$

$$\phi(\Omega) = \mathbb{R}^3 \setminus N; \quad N = \{(x,y,z) : x \geq 0, y = 0, z \in \mathbb{R}\}$$

Tedy

$$\phi : (r, u, v) \to (x, y, z)$$

$$\nabla\phi = \begin{pmatrix} \cos u \cos v & -r \sin u \cos v & -r \cos u \sin v \\ \sin u \cos v & r \cos u \cos v & -r \sin u \sin v \\ 0 & \sin v & u \cos v \end{pmatrix}$$

Tedy pro jakobián platí

$$\mathrm{J}\phi = r^2 \cos v$$

Příklad 8.7 Objem V ohraničený plochou (těleso M)

$$(x^2 + y^2 + z^2)^3 = 3xyz$$

Nechť

$$F = \underbrace{(x^2 + y^2 + z^2)^3}_{\geq 0} - 3xyz$$

Prostor $\mathbb{R}^3$ rozdělíme osami x, y, z na 8 částí, plocha tedy existuje pouze ve 44 z nich. Tedy omezme se na část $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

Zavedeme sférické souřadnice:

$$x = r \cos u \sin v$$

$$y = r \sin u \sin v$$
$$z = u \sin v,$$

kde $u \in (0, \frac{\pi}{2})$ je zeměpisná délka, $v \in (0, \frac{\pi}{2})$ je zeměpisná šířka.

Tedy platí

$$(r^2)^3 = 3r^3 \cos u \cos^2 v \sin u \sin v,$$

což upravíme na

$$r^3 = 3 \cos u \cos^2 v \sin u \sin v,$$

Zvolíme oblast Ω:

$$\Omega = \{(r, u, v) : u, v \in (0, \frac{\pi}{2}); r < \rho(u, v)\},$$

kde pro ρ platí následující vztah:

$$\rho(u, v) = \sqrt[3]{3 \cos u \cos^2 v \sin u \sin v}$$

A nyní počítáme objem (tedy pouze jeho čtvrtinu, neboť je v daných čtyřech oblastech symetrický:)

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{4}\lambda_3(M) &= \int_{M \cap \{x,y,z \geq 0\}} 1 \, \mathrm{d}x = \\ &= \int_\Omega r^2 \cos v \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}r = \\ &= \int_{(0,\frac{\pi}{2})^2} \{\int_0^{\rho(u,v)} r^2 \cos v \, \mathrm{d}r\} \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{(0,\frac{\pi}{2})^2} \{[\tfrac{r^3}{3}\cos v]_{r=0}^{r=\rho(u,v)}\} \;\mathtt{d}u\;\mathtt{d}v \\
&= \int_{(0,\frac{\pi}{2})^2} \cos u \cos^3 v \sin u \sin v \;\mathtt{d}u\;\mathtt{d}v \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 v \sin v \;\mathtt{d}v\} \cos u \sin u \;\mathtt{d}u \\
&= [-\tfrac{\cos^4 v}{4}]_{v=0}^{v=\frac{\pi}{2}} [\tfrac{-1}{4}\cos 2u]_{u=0}^{u=\frac{\pi}{2}} \\
&= \tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}) = \tfrac{1}{8}
\end{aligned}
$$

Definice 8.3 (UNITÁRNÍ MATICE.)
Reálná matice Q se nazve unitární, jestliže $Q^{-1} = Q^T$.

Poznámka 8.9

- ekvivalentně:
  - $Q^T Q = I \ (= \delta_{ij})$
  - sloupce Q tvoří ortonormální (ON) bázi
  - Q reprezentuje otočení (symetrii vůči nějakému objektu)
- Q je unitární $\Rightarrow |\det Q| = 1$

  dk:

$$
\begin{array}{ccc}
\det Q^{-1} & = & \det Q^T \\
\| & & \| \\
\frac{1}{\det Q} & & \det Q
\end{array}
$$

  Jelikož $[\det(Q)]^2 = 1 \Rightarrow |\det Q| = 1$

Lemma 8.1 Nechť A je regulární matice $n \times n$. Pak existují unitární matice P, Q a $D \geq 0$ diagonální tak, že $A = PDQ$.

Důkaz lemmatu 8.1 Označ $B = A^T A$, matici B "odmocníme":

B je symetrická matice: $B^T = (A^T A)^T = A^T (A^T)^T = B$

$\exists n$ reálných vlastních čísel a odpovídajících vlastních vektorů B, vlastní vektory tvoří ON bázi v $\mathbb{R}^n$

$B = Q^T \Delta Q$, Q je unitární, Δ je diagonální:

$$
\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \lambda_i \geq 0 \ \forall i :
$$

$$\begin{aligned} A^T A v_i &= \lambda_i v_i \quad / \text{ skalárně vynásobíme s } v_i \\ < A^T A v_i, v_i > &= < \lambda_i v_i, v_i > \\ \underbrace{< A v_i, A v_i >}_{\geq 0} &= \underbrace{\lambda_i < v_i, v_i >}_{\geq 0} \end{aligned}$$

Definuji

$$D = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

Jednoduchá pozorování:

$D^2 = \Delta$, označ $R = Q^T D Q$, kde R je symetrická.

$$R^2 = Q^T D \underbrace{Q Q^T}_{Id} D Q = Q^T \Delta Q = B$$

<u>závěr:</u>

$$A = A R^{-1} R = A R^{-1} \underbrace{Q^T D Q}_{R}$$

Stačí: $P = A R^{-1} Q^T$ je unitární.

Proč?

$$P^T P = Q (R^{-1})^T \underbrace{A^T A}_{R^2} R^{-1} Q^T = Q \underbrace{R^{-T} R}_{Id} \underbrace{R R^{-1}}_{Id} Q^T = Q Q^T = Id$$ □

Lemma 8.2 Nechť $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je lineární zobrazení, $M \subset \mathbb{R}^n$ je libovolná množina. Potom $\lambda_n^*(L(M)) = |\det L| \cdot \lambda_n^*(M)$.

Důkaz lemmatu 8.2

(a): $\det L = 0$:

$$\underbrace{\lambda_n^*(L(M))}_{\leq 0} \leq \underbrace{\lambda_n^*(\underbrace{L(\mathbb{R}^n)}_{\substack{\text{podprostor}\\ \text{nižší}\\ \text{dimenze}}})}_{=0} = |\det L| \cdot \lambda_n^*(M)$$

(b): $\det \neq 0$:

Lemma 8.1: $L = PDQ$; P, Q unitární, $D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$, $d_i > 0$.

<u>1. krok:</u> $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}^n$ otevřený interval, tak

$$\lambda_n(L(\mathcal{I})) = |\det L| \cdot \ln_m(\mathcal{I})$$

$$|\det L| = |\det D| = \Pi_{i=1}^n d_i$$
$$\lambda_n(L(\mathcal{I})) = \lambda_n(PDQ(\mathcal{I})) \underbrace{=}_{(\odot)} \lambda_n(D(\mathcal{I}))$$

$(\odot)$ P, Q je otočení; otočení nezmění míru, tak na ně zapomenu

Nechť $\mathcal{I} = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$. Potom

$$D(\mathcal{I}) = (d_1 a_1, d_1 b_1) \times \cdots \times (d_n a_n, d_n b_n)$$

Tedy

$$\lambda_n(D(\mathcal{I})) = \underbrace{d_1 \ldots \mathrm{d}_n}_{=|\det L|} \lambda_n(\mathcal{I})$$

2. krok: $M \subset \mathbb{R}^n$ libovolná, $\mathcal{I}_k$ otevřený interval:

$$M \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{I}_k$$

$$\Rightarrow \quad L(M) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} L(\mathcal{I}_k)$$

Tedy

$$\lambda_n^*(L(M)) \leq \lambda_n^*(\bigcup_k L(\mathcal{I}_k)) \leq \sum_k \underbrace{\lambda_n^*(L(\mathcal{I}_k))}_{=|\det L| \cdot |\mathcal{I}_k|} \leq |\det L| \cdot \sum_{k=1}^{\infty} |\mathcal{I}_k|$$

infimum přes všechna pokrytí:

$$\lambda_n^*(L(M)) \leq |\det L| \cdot \lambda_n^*(M)$$

Opačná nerovnost:

$$M = L^{-1}(LM) \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{analogicky jako výše}} \quad \lambda_n^*(M) \leq \underbrace{|\det L^{-1}|}_{=|\det L|^{-1}} \cdot \lambda_n^*(L(M))$$

$$\Rightarrow \quad |\det L| \cdot \lambda_n^*(M) \leq \lambda_n^*(L(M))$$
$$\Rightarrow \quad |\det L| \cdot \lambda_n^*(M) = \lambda_n^*(L(M))$$

□

Poznámka 8.10 [Souvislost s větou o substituci.]

$$\int_{\phi(\Omega)} 1 \, \mathrm{d}y = \int_{\Omega} |\mathrm{J}\phi(x)| \, \mathrm{d}x$$

Lemma 8.2: $\Rightarrow$ platí pro $\varphi(x) = Lx$,

nechť $\mathrm{J}\phi = |\det L|$

$$\lambda_n(\phi(\Omega)) = |\det L| \cdot \lambda_n(\Omega)$$

ϕ nelineární, ale $\mathcal{C}^1$: lokálně na $\mathcal{U}(x_0)$:

$$\phi(x) = \phi(x_0) + L \cdot x,$$

kde

$$L = \nabla\phi(x_0).$$

Index