PŘÍKLADY Z TERMODYNAMIKY

1.1 Procvičte pojmy úplný a neúplný diferenciál, holonomní a neholonomní forma.

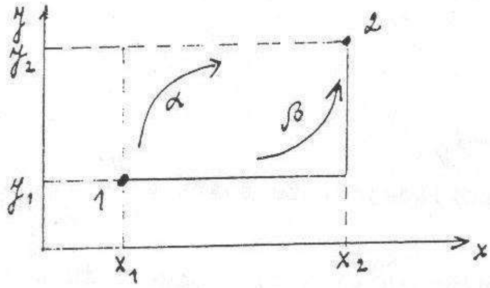
Zdiferencujte funkci $f_1(x,y) = 3x^2y^3$.

Najděte funkci f_2 takovou, že

$$df_2 = 6xy^2dx + 9x^2y\,dy$$

Studujte, zda $\int_1^2 df_1$ a $\int_1^2 df_2$ závisí na dráze.

Dráhy zvolte podle obrázku.



Ověřte platnost Cauchyových podmínek pro df_1 a df_2.

1.2 Řešte následující exaktní rovnice

$$(x+y)dx + (x+2y)dy = 0$$

$$(x^2+y^2+2x)dx + 2xy\,dy = 0$$

$$(x^3-3xy^2+2)dx - (3x^2y-y^2)dy = 0$$

$$(x+y^2)dx - 2xy\,dy = 0$$

$$\frac{y}{x}dx + (y^3 - \ln x)dy = 0$$

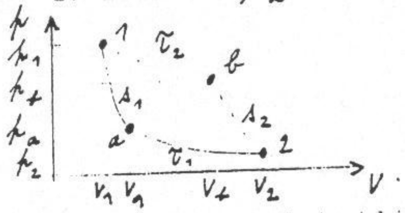
PT2

1.3 Ukažte na konkrétním příkladě ideálního plynu, že práce a teplo závisí na dráze, ale jejich algebraický součet (s vhodným znamením) na dráze nezávisí.
Předpokládejte $pV = nR\tau$(p je tlak , V je objem, n je počet molů, R je plynová konstanta a τ empirická teplota)

Uvažujte dvě dráhy :

a) isoterma τ_1 , adiabata A_1

b) adiabata A_2 , isoterma τ_2



pro adiabatu předpokládejme, že známe $pV^{\varkappa}$ = const.

Najděte : 1) práci po drahách a) a b) z bodu 1 do bodu 2

2) teplo po drahách a) a b) z bodu 1 do bodu 2

3) změnu energie jako algebraického součtu tepla a práce po dráze a) a b).

1.4 Dokažte, že pro libovolnou jednoduchou soustavu, určenou jedním vnějším parametrem V a teplotou T, plyne z existence stavové rovnice f(P,V,T) = 0 pravidlo -1:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = -1$$

PT3

2.1 Nechť práce plynu je $dW = p(V,T)dV$. Dokažte, že práce není úplný diferenciál. (Obecně totiž $dW = pdV + 0dT$ a dále využijte podmínku pro úplný diferenciál).

2.2 S využitím faktu, že U je stavová veličina, dokažte

$$\frac{\partial c_V}{\partial V} = \frac{\partial}{\partial T} l_v - \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V ,$$

kde l_v je latentní teplo objemové změny

$$l_v = \left(\frac{\partial U}{\partial V} + p\right) \qquad dQ = c_V dT + l_v dV$$

(Řešení : $c_V = \left(\dfrac{\partial U}{\partial T}\right)_V$, $l_v = \dfrac{\partial U}{\partial V} + p$

a dále využijte záměnnosti druhé druhé derivace

$$\frac{\partial U^2}{\partial T \partial V} = \frac{\partial^2 U}{\partial V \partial T} .)$$

2.3 Popište pokus rozpínání plynu do vakua. Ukažte, že
$dW = 0$, $dQ = 0$ $\Rightarrow$ $dU = 0$
Z experimentálního faktu, že pro ideální plyn změna teploty po pokusu je rovna 0, dokažte, že U nezávisí na V.

PT4

2.4 Pro 1 mol Van der Waalsova plynu platí

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$$

Tuto rovnici lze psát pro zředěný plyn (malou hustotu, nebo velký objem) jako rozvoj

$$pV = RT\left(1 + \frac{A_2}{V} + \cdots\right)$$

nebo

$$pV = RT\left(1 + B_2 \cdot p + \cdots\right)$$

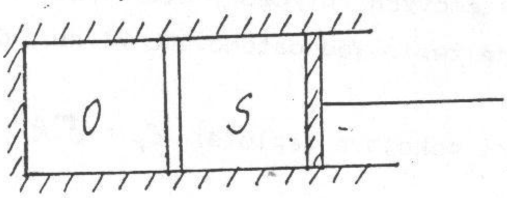
Najděte viriálové koeficienty A_2, B_2 v závislosti na a,b).

2.5 Na základě příkladu (2.4) diskutujte, jakou uděláme chybu, když při určování teploty chybně použijeme neideální plyn

(t.j. chybné $T' = T(1 + \frac{A_2}{V}$)

Konkretizujte pro vodík a dusík.

3.1 Adiabaticky izolovaný systém se skládá ze systému S a O. Tyto systémy jsou od sebe odděleny diatermickou pevnou stěnou. Vnější práce se koná jen na systému S (viz. obr.) (Předpokládejte aditivnost energie)



a) Dokažte, že $dQ_S = -dU_O$ (1)

b) Objasněte, jak je možné, že úplný diferenciál $-dU_O$ se rovná neúplnému diferenciálu dQ_S.

(Řešení : týká se jiných parametrů, jednou parametrů systému S a podruhé systému O).

c) Ukažte, že na základě platnosti (1) se měří teplo v kalorimetrech.

3.2 Zopakujte odvození rovnice adiabaty v diferenciálním tvaru pro proměnné p,V. Potom dokažte

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{ad} = \frac{c_p}{c_V}\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T$$

3.3 Šíření zvuku v tekutinách lze považovat za adiabatický proces. V tomto případě rychlost zvuku $c_{zv} = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{ad}}$.

Na základě výsledků úlohy (3.2) najděte rychlost zvuku v jednoatomových a dvouatomových plynech, které považujete za ideální (molární měrné teplo jednoatomového plynu $c_V = \frac{3}{2} R$,

dvouatomového plynu (při pokojové teplotě) $c_V = \frac{5}{2} R$.

(Je $\frac{\partial p}{\partial V} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)\left(\frac{\partial \rho}{\partial V}\right)_{\rho = \frac{1}{V}}$).

3.4 Polytropický proces je charakterizován $dQ = c \cdot dT$ (c=konst)
Najděte rovnici polytropy pro ideální plyn
a) v diferenciálním tvaru pro proměnné T,V
b) v diferenciálním tvaru pro proměnné p,V
c) v integrálním tvaru pro ideální plyn v proměnných p,V.
Kdy polytropa přejde v adiabatu a kdy v izotermu ?

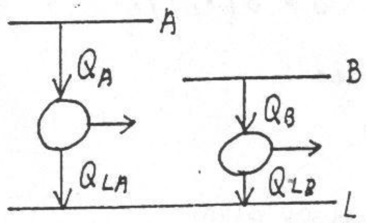
3.5 Najděte, jak se mění teplota v atmosféře s výškou za předpokladu, že děje jsou adiabatické.

3.6 Dokažte ekvivalenci Thomsonovy a Clausiovy formulace druhé věty termodynamické.
Clausius: přechod tepla z teplejšího na chladnější je irreverzibilní
Thomson: přímé přeměna práce v teplo je —"—

3.7 Ideální plyn je uzavřený ve válci s pístem. Válec je v tepelném kontaktu s lázní o teplotě τ. Kolik tepla získá plyn z lázně, jestliže změní pomalu svůj objem z V_1 na V_2 ? ($V_2 > V_1$).

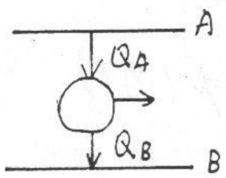
PT7

4.1 Termodynamická stupnice teplot byla zavedena takto : Byla zvolena standardní lázeň L a měřena účinnost strojů mezi lázněmi (A,L),(B,L),... .Teplota T_A lázně A je definována



(1) $$\frac{Q_A}{Q_{LA}} = -a\,T_A \qquad (a = const)$$

Dokažte, že pro stroj pracující mezi A,B platí



$$\frac{Q_A}{Q_B} = -\frac{T_A}{T_B}$$

4.2 Byl formulován postulát („Doplněk ke Clausiově formulaci druhého zákona termodynamiky") : „Mějme dvě lázně o stejné teplotě τ. Vždy je možno převádět teplo z jedné lázně do druhé bez konání celkové práce."
S použitím druhého zákona termodynamiky a doplňku dokažte, že když A } B (čti A je teplejší než B), B } C potom A } C.
Poznámka : A } B když při tepelném kontaktu teče teplo z A do B samovolně.

4.3 Nechť je $pV = R\tau$, což je definice plynové stupnice τ_{pl} . Je $\left(\frac{\partial u}{\partial V}\right)_T = 0$. Dokažte, že $\tau = c\cdot T$, c = konst. a T je termodynamická stupnice teplot.

4.4 Pro Van der Waalsův plyn najděte kalorickou rovnici

$U = U(V,T)$, C_V = konst a $S = S(V,T)$.

(podobně pro jiné stavové rovnice).

4.5 Najděte $C_p - C_v$ pro Van der Waalsův plyn.

4.6 Závisí C_v na V pro Van der Waalsův plyn ?

4.7 Jaká musí být stavová rovnice $p = p(V,T)$,
aby C_v nezáviselo na V ?

4.8 Odvoďte výraz pro entropii ideálního plynu.
(V proměnných V,T a P,T)

4.9 Odvďte výraz pro entropii Van der Waalsova plynu.

4.10 Najděte termodynamické potenciály F, G a H pro ideální plyn (v jejich přirozených proměnných) .

4.11 Gibbsův potenciál soustavy je dán vztahem

$$G = aT(1 - \ln T) + RT \ln p - T \cdot S_0 ,$$

kde a, R, S_0 jsou konstanty.
Určete termickou a kalorickou stavovou rovnici teto soustavy.

5.1 a) Přesvědčete se, že $c_p = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p$ a $c_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V$.

b) Užijte $S = S(T, V(T, p))$ a najděte Cp − Cv v takovém tvaru, aby stačilo znát $p = p(V, T)$.

(Užijte Maxwellova vztahu $\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$)

5.2 Najděte rozdíl mezi koeficientem vratné adiabatické stlačitelnosti $-\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S$ a koeficientem isotermické stlačitelnosti $-\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$.

a) Tento rozdíl vyjádřete prostřednictvím vratného mechanicko-kalorimetrického jevu charakterisovaného $T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T$.

b) prostřednictvím $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$ známého z termické stavové rovnice.

(Opět využijte $V = V(p, T(S, V))$ a pro $\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S$ pravidlo −1.

Pro b) ještě použijte Maxwellova vztahu $\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$).

PT10

6.1 Najděte rozdíl měrných tepel $C_H - C_M$ pro ideální paramagnetikum (platí pro něj Curievův zákon $M = \alpha \frac{H}{T}$, kde α je konstanta).

6.2 Najděte změnu teploty při vratné adiabatické změně magnetizace o dM.

6.3 Spočtěte chemický potenciál ideálního plynu jako funkci T a p. Ukažte, že výsledek lze psát jako

$$\mu = \mu_0(T) + RT \ln p.$$

6.4 Pro záření černého tělesa platí (z elektrodynamiky) vztah $p = \frac{1}{3} u(T)$, kde $u = \frac{U}{V}$. Najděte $u(T)$, $S = S(T,V)$ a μ.

6.5 Příklady na výpočet maximální práce :

a) pomocný příklad : Mějme nádobu o objemu $V = 1\ m^3$. V nádobě je ideální plyn při teplotě $T = 300\ ^\circ C$ a tlaku $p = 1$ MPa (desetinásobek atmosférického tlaku). Jaká je tepelná kapacita plynu v nádobě, když molární kapacita je $C_V = \frac{3}{2} R$?

b) Předpokládejte, že tepelná kapacita plynu je nezávislá na teplotě. Jaká je maximální práce, kterou lze získat ze systému (plyn v nádobě) z bodu a) za předpokladu, že objem systému zůstává konstantní a teplota systému klesne na teplotu okolí ($T_0 = 20\ ^\circ C$).

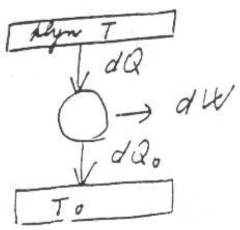
Výpočet proveďte

1) na základě formule

$$W_{max} = -\left(\Delta U - T_0 \Delta S + p_0 \Delta V\right) \qquad (*)$$

2) na základě Carnotova cyklu

$$\frac{dQ}{dQ_0} = \frac{T}{T_0}$$



c) Použijte výraz (*) pro maximální práci a spočítejte, kolik práce lze získat ze systému a) jestliže teplota i tlak systému klesnou na hodnoty okolí ($T_0 = 20\ ^\circ C$, $p_0 = 0{,}1$ MPa)

PT 12

7.1 Metodou Jacobiánů dokažte vztah $\frac{c_p}{c_V} = \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S}{\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T}$

7.2 Odvoďte podmínky rovnováhy mezi k složkami a f fázemi heterogenního systému (za podmínky, že spolu chemicky nareagují).

7.3 Odvoďte Gibbsovo fázové pravidlo.