1 Mechanika hmotného bodu a soustav hmotných bodů

Základní kinematické veličiny, Newtonovy pohybové zákony, inerciální soustavy, I. a II. impulzová věta. Keplerovy zákony, harmonický oscilátor (tlumený i netlumený), vázané oscilátory. D'Alembertův princip, Lagrangeovy rovnice 2. druhu. Hamiltonovy kanonické rovnice.

1.1 Základní kinematické veličiny

Kinematika se zabývá popisem pohybu. Důležitým pojmem je **hmotný bod** - idealizace, kdy se libovolné těleso nahrazuje bodem (často pohybem těžiště) s danou hmotností.

Základním kinematickým pojmem je **trajektorie**. Je to spojitá vektorová funkce času $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Trajektorii obyčejně zadáváme parametricky, její délku nazýváme **dráha**.

Pohyb částice (tj. změnu polohy v čase) charakterizujeme **rychlostí**:

$$\vec{v}_p = \frac{\vec{r}(t_1) - \vec{r}(t_2)}{t_1 - t_2} \quad \text{(průměrnou)} \tag{1}$$

$$\vec{v} = \lim_{t_1 \to t_2} \vec{v}_p = \lim_{t_1 \to t_2} \frac{\vec{r}(t_1) - \vec{r}(t_2)}{t_1 - t_2} \equiv \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t} \quad \text{(okamžitou).} \tag{2}$$

Pokud je velikost rychlosti konstantní, pohyb nazýváme **rovnoměrný**, jinak **nerovnoměrný**. **Přímočarý** pohyb je charakterizován tím, že pohyb probíhá podél konstantně směřujícího vektoru. Nepřímočarý pohyb je **křivočarý**. Při pohybu se mění jednak velikost a jednak směr pohybu:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\,\vec{\mathrm{e}}_r + v\frac{\mathrm{d}\,\vec{\mathrm{e}}_r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\,\vec{\mathrm{e}}_r + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(|\,\vec{\mathrm{e}}_r|\,\mathrm{d}\varphi\,\vec{\mathrm{e}}_\varphi) = v\,\vec{\mathrm{e}}_r + \vec{\omega}\,\vec{\mathrm{e}}_\varphi = \vec{v}_r + \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{3}$$

Vektor $\vec{\omega}$ nazýváme **úhlová rychlost**.

Změna rychlosti se popisuje **zrychlením**:

$$\vec{a} \equiv \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\,\vec{\mathrm{e}}_t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\vec{\mathrm{e}}_t + v\frac{\mathrm{d}\,\vec{\mathrm{e}}_t}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\vec{\mathrm{e}}_t + \frac{v^2}{R}\,\vec{\mathrm{e}}_n = a_t\,\vec{\mathrm{e}}_t + a_n\,\vec{\mathrm{e}}_n, \tag{4}$$

které má tečnou a normálovou (**dostředivou**) složku. Pohyb charakterizovaný konstantním zrychlením nazýváme **rovnoměrně zrychlený**.

Analogicky k úhlové rychlosti se zavádí i **úhlové zrychlení**:

$$\vec{\epsilon} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{\omega}}. \tag{5}$$

1.2 Newtonovy pohybové zákony

Dynamika zkoumá příčiny pohybu; základem klasické teorie jsou **Newtonovy pohybové zákony**.

První Newtonův zákon je **zákon o setrvačnosti**: *Těleso setrvává v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu, dokud není nuceno vnějšími vlivy (působením jiného tělesa) tento svůj stav změnit.* Pokud tedy najdeme těleso, na které nepůsobí žádné vnější vlivy, můžeme s ním spojit speciální **inerciální soustavu souřadnou**(tj. dané tělesu je vůči ní v klidu nebo v pohybu rovnoměrném přímočarém). Ostatní soustavy jsou **neinerciální**. První Newtonův zákon nám tedy v podstatě definuje inerciální vztažnou soustavu.

Druhým Newtonovým zákonem, **zákonem o síle**, zavádíme sílu a hmotnost:

$$\vec{F} = m\vec{a}. \tag{6}$$

Pokud známe silové působení na vyšetřované těleso, můžeme pomocí **pohybové rovnice** určit jeho trajektorii:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}. \tag{7}$$

Třetí Newtonův zákon (**zákon akce a reakce**) nám říká: *Každá akce vyvolává reakci stejné velikosti a opačného směru.*

Existují různé druhy sil působících v inerciální vztažné soustavě: např. **dostředivá síla** $F = m\omega^2 R$, která míří do středu kruhu, nebo **tíhová síla** $\vec{F} = m\vec{g}$. Pokud provádíme popis v neinerciální soustavě, lze použít druhý Newtonův zákon, ale k silám je třeba přičíst nefyzikální síly, které kompenzují vliv zrychleného pohybu neinerciální soustavy. Nejznámějšími příklady těchto sil (mají původ v otáčení se neinerciální soustavy vůči inerciální) jsou **odstředivá síla**, která má stejnou velikost jako síla dostředivá, míří od osy a působí pouze na body mimo osu otáčení, a **Coriolisova** $\vec{F}^C = 2m\vec{v'} \times \vec{\omega}$, působící pouze na tělesa, která se vůči neinerciální soustavě pohybují rychlostí $\vec{v}'$, jejíž směr není shodný s osou otáčení. Tyto efekty lze zjistit například měřením gravitačního zrychlení v různých zeměpisných šířkách (měřené gravitační zrychlení je vektorovým součtem tíhového a odstředivého, na pólu je největší a na rovníku nejmenší); stáčení pasátů lze naopak vysvětlit Coriolisovou silou.

Úhlová rychlost otáčení Země vůči stálicím je $\omega_Z \doteq \frac{2\pi}{24}$ hod^{-1}. Rozdíl gravitačního zrychlení na rovníku a na pólu je 5 cms^{-2} (experimentálně zjištěno), na těleso o $m = 30 \cdot 10^3$ kg, $v = 50$ km/hod pohybující se na 50° severní šířky působí Coriolisova síla 50 N.

1.3 Další mechanické veličiny

K vystižení celkového působení na hmotný bod používáme veličinu zvanou **práce**:

$$\mathrm{d}A = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l}, \tag{8}$$

rychlost konání práce charakterizuje **výkon**

$$P = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}. \tag{9}$$

Každému bodu prostoru je možno přiřadit určité silové působení, čímž charakterizujeme pole. Pole dělíme na **konzervativní** ($\oint \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$) a **nekonzervativní** ($\oint \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \neq 0$).

V konzervativním poli nezávisí vykonaná práce na tvaru dráhy a můžeme zavést **potenciální energii** (potenciál se někdy zavádí na jednotkovou hmotnost), která charakterizuje práci vykonanou při pohybu mezi dvěma body:

$$\vec{F} = -\nabla U. \tag{10}$$

U nekonzervativního pole (jako je například pole třecí síly nebo valivého odporu) potenciál zavést nelze.

Kromě potenciální energie se zavádí i **pohybová energie**

$$E_k = \frac{mv^2}{2}; \tag{11}$$

součet kinetické a potenciální energie, tzv. mechanická energie, se zachovává.

Mechanické účinky pohybujícího se tělesa charakterizuje **hybnost**

$$\vec{p} = m\vec{v}. \tag{12}$$

Newton formuloval svůj druhý zákon v obecnějším tvaru pomocí hybnosti:

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}. \tag{13}$$

Pokud tento vztah použijeme pro soustavu volných částic, na levou stranu dáme součet vnějších působících sil a na pravou stranu součet hybností, dostaneme **I. větu impulzovou**. Pokud na soustavu nepůsobí vnější síly, platí **zákon zachování hybnosti**.

Pro popis otáčivého pohybu je vhodný **moment síly**

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{14}$$

a **moment hybnosti**

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}. \tag{15}$$

Tyto dvě veličiny jsou vázány vztahem analogickým ke druhému Newtonovu zákonu:

$$\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}. \tag{16}$$

Analogicky, pro soustavu volných hmotných bodů se součtem vnějších momentů síly na levé straně a součtem momentů hybnosti na pravé se jedná o **II. větu impulzovou**, při použití na soustavu bez vnějších sil zjistíme, že moment hybnosti se zachovává.

1.4 Soustava hmotných bodů a tuhé těleso

Poloha soustavy N hmotných bodů resp. tuhého tělesa je určena **hmotným středem** neboli **těžištěm**:

$$\vec{r}_S = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{\int_{(V)} \vec{r}\rho \,\mathrm{d}V}{\int_{(V)} \rho \,\mathrm{d}V}. \tag{17}$$

Pokud všechny body tělesa konají pohyb se stejným vektorem rychlosti, jedná se o **translaci**, jinak o **rotaci**.

Pro popis rotace tuhého tělesa nebo soustavy hmotných bodů se analogicky k hmotnosti zavádí **moment setrvačnosti** (obecně je to tenzor)

$$J = \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2 = \int_{(V)} R^2 \rho \,\mathrm{d}V, \tag{18}$$

potom platí

$$\vec{L} = J\vec{\omega}, \quad E_k = \frac{J\omega^2}{2} \quad \text{a} \quad \vec{M} = J\vec{\epsilon}. \tag{19}$$

Pro výpočet momentu setrvačnosti můžeme použít **Steinerovu větu**, podle které se dá moment setrvačnosti vyjádřit pomocí momentu setrvačnosti při otáčení kolem osy procházející hmotným středem a rovnoběžné s momentální osou otáčení, vzdálenou od ní o d:

$$J = J_0 + md^2. \tag{20}$$

1.5 Keplerova úloha

Zkoumáme-li pohyb hmotného bodu v poli centrální síly, je vhodné použít sférické souřadnice

$$\begin{aligned} x &= r \sin\vartheta \cos\varphi \\ y &= r \sin\vartheta \sin\varphi \\ z &= r \cos\vartheta, \end{aligned} \tag{21}$$

v nichž je možno kinetickou a potenciální energii (coulombické interakce) vyjádřit jako

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2\vartheta \dot{\varphi}^2\right) \\ U &= -\frac{\kappa M m}{r} \\ (\vec{F} &= -\kappa \frac{Mm}{r^3}\vec{r}.) \end{aligned} \tag{22}$$

Pro libovolnou centrální sílu platí, že pohyb probíhá pouze v rovině a při pohybu se zachovává z-tvá složka momentu hybnosti $L_z = mr^2\dot{\varphi}$ (probíhá-li pohyb v rovině xy) i celková energie $E_k + U$. Lze odvodit i **Binetův vzorec**, ve kterém je zavedena substituce $r(t) = \frac{1}{u(\varphi t)}$:

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\varphi^2} + u = -\frac{m}{L_z^2}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}u}. \tag{23}$$

Použijeme-li Binetův vzorec pro coulombickou interakci, dostaneme jako řešení této diferenciální rovnici kuželosečky:

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}, \tag{24}$$

kde nám parametr ε říká, o jakou kuželosečku se jedná ($\varepsilon > 1$ je hyperbola, $\varepsilon = 1$ parabola, $0 < \varepsilon < 1$ elipsa a $\varepsilon = 0$ kružnice). Toto je známé jako **první Keplerův zákon**: *Planety se pohybují po elipsách málo odlišných od kružnic, v jejichž společném ohnisku je Slunce.*

První kosmická rychlost (odpovídá rychlosti hmotného bodu obíhajícího v bezprostřední blízkosti Země) je $7,9$ km/s, druhá kosmická rychlost (odpovídá opuštění gravitačního pole Země) je $11,2$ km/s.

Druhý Keplerův zákon se zabývá (plošnou) rychlostí oběhu:

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} \sim r^2\dot{\varphi} \sim L_z = \text{konst.} \tag{25}$$

Průvodič planety opisuje za stejné časové intervaly stejné plochy.

Jestliže se hmotné body pohybují po elipsách, můžeme určit vztah mezi dobou oběhu a parametry elipsy

$$S = \int \mathrm{d}S = \frac{L_z}{2m}\,\mathrm{d}t = \frac{L_z}{2m}T \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2m}{L_z}S = \frac{2m}{L_z}\pi ab. \tag{26}$$

Parametry elipsy lze vyjádřit pomocí veličin zadaných v kinetické a potenciální energii:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\kappa M} = \text{konst.} \tag{27}$$

Tento fakt je obsahem **třetího Keplerova zákona**.

1.6 Harmonický oscilátor

Uvažujme nejdříve pohyb způsobený silou $\vec{F} = -kx$. Musíme tedy řešit pohybovou rovnici

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0. \tag{28}$$

Řešením této rovnice jsou harmonické funkce

$$x = C_1\cos(\omega_0 t + \phi), \qquad \text{kde} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{29}$$

Oscilátor harmonicky kmitá s vlastní úhlovou frekvencí ω_0.

Přidáme-li navíc odporovou sílu úměrnou rychlosti, dostaneme rovnici s tlumícím členem

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0 x = 0. \tag{30}$$

Vyřešením charakteristické rovnice dostaneme (pro $\delta \neq \omega_0$)

$$x = C_1\,\mathrm{e}^{(-\delta+D)t} + C_2\,\mathrm{e}^{(-\delta-D)t}, \qquad \text{kde} \quad D = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}. \tag{31}$$

Charakter pohybu závisí na vztahu mezi δ a ω_0.

Pro $\delta > \omega_0$ dostáváme **aperiodický pohyb**. Obě exponenciály jsou klesající, okamžitá výchylka i rychlost pohybu klesá k nule.

Pro $\delta < \omega_0$ se jedná o **tlumený harmonický kmit**. V argumentu exponenciály dostaneme komplexní číslo:

$$x = \mathrm{e}^{-\delta t}(C_1\,\mathrm{e}^{\imath\omega t} + C_2\,\mathrm{e}^{-\imath\omega t}) = \mathrm{e}^{-\delta t}(D_1\cos(\omega t) + D_2\sin(\omega t)) \Rightarrow$$
$$x = C\,\mathrm{e}^{-\delta t}\sin(\omega t + \phi), \qquad \text{kde} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}. \tag{32}$$

Oscilátor kmitá s úhlovou frekvencí ω; amplituda výchylky se ale exponenciálně zmenšuje. Okamžitá výchylka a rychlost se blíží k nule v nekonečnu, bod projde nekonečně krát rovnovážnou polohou.

Speciální případ **mezního aperiodického pohybu** pro $\delta = \omega_0$ je popsán rovnicí

$$x = \mathrm{e}^{-\delta t}(C_1 + C_2 t). \tag{33}$$

Bod zaujme rovnovážnou polohu pouze jednou pro $t = -\frac{C_1}{C_2}$.

Působí-li na tlumený harmonický oscilátor navíc harmonická vynucující síla, musíme k řešení přičíst člen úměrný $\sin(\omega t + \phi)$ (konstanta ϕ je dána z rovnice). Po určitém čase vymizí člen s klesající exponenciálou a zůstane pouze člen úměrný sinu (tzv. ustálený stav). Pro frekvenci vynucující síly rovnou $\sqrt{\omega_0^2 - 2\delta}$ nastává **rezonance** - amplituda je maximální (roste nade všechny meze, tj. přestává platit daný model).

Pro dva vázané harmonické oscilátory (o stejné hmotnosti) dostaneme soustavu dvou diferenciálních rovnic:

$$\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}^2x_1}{\mathrm{d}t^2} &= -kx_1 + k_p(x_2 - x_1) \\ m\frac{\mathrm{d}^2x_2}{\mathrm{d}t^2} &= -kx_2 - k_p(x_2 - x_1). \end{aligned} \tag{34}$$

Jejich řešením dostaneme

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}[C_1\sin(\omega_0 t + \phi_1) - C_2\sin(\omega_1 t + \phi_2)] \\ x_2 &= \frac{1}{2}[C_1\sin(\omega_0 t + \phi_1) + C_2\sin(\omega_1 t + \phi_2)]. \end{aligned} \tag{35}$$

U kmitů se objevuje nová frekvence způsobená vazbou $\omega_1 = \sqrt{\frac{k+2k_p}{m}}$, výsledný pohyb je algebraické sečtení kmitu s původní frekvencí ω_0 a s frekvencí způsobenou vazbou. Pokud se jedná o slabou vazbu ($k_p \ll k$), mají výsledné funkce tvar rázů.

1.7 D'Alembertův princip

V pohybové rovnici $\vec{F} = m\vec{a}$ můžeme sílu $\vec{F}_s = -m\vec{a}$ klasifikovat jako **setrvačnou sílu**, která přísluší danému zrychlenému pohybu. Můžeme tedy formulovat **d'Alembertův princip**: *Síly mechanické soustavy jsou v rovnováze, přičteme-li k silám vtištěným (včetně reaktivních) síly setrvačné.*

Matematicky můžeme tento princip formulovat pro soustavu N hmotných bodů pomocí **virtuálních posunutí** δx_i (virtuální posunutí jsou nekonečně malá posunutí, která jsou v každém okamžiku v souladu s vazbami):

$$\sum_{i=1}^{3N}(m_i\ddot{x}_i - F_i)\delta x_i = 0. \tag{36}$$

Speciálními případy d'Alembertova principu jsou:

Newtonovy pohybové zákony	$m_i\ddot{x}_i = F_i$	nejsou vazby
princip virtuálních posunutí	$\sum_i F_i\delta x_i = 0$	podmínka rovnováhy (statika)

V případě konzervativních sil přejde podmínka rovnováhy na tvar

$$\sum_i -\frac{\partial U_i}{\partial x_i}\,\delta x_i = 0 \quad \Rightarrow \qquad \delta U = 0. \tag{37}$$

Systém je tedy v rovnováze, pokud má potenciál extrém.

1.8 Lagrangeovy rovnice

D'Alembertův princip je ekvivalentní **Lagrangeovy rovnicím I. druhu**:

$$\begin{aligned} m_i\ddot{x}_i &= F + \sum_{k=1}^{v} \lambda_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \\ \varphi_k(x_i, t) &= 0. \end{aligned} \tag{38}$$

(pro v vazeb, vazba je vyjádřena druhou rovnicí).

Pro efektivnější popis systému je vhodné zavést **zobecněné souřadnice** q_i (libovolné parametry jednoznačně určující konfiguraci systému) v **konfiguračním prostoru** všech zobecněných souřadnic daného problému. V popise považujeme zobecněné souřadnice q_i a zobecněné rychlosti $\dot{q}_i$ za nezávislé.

Vyjdeme-li z dAlembertova principu, dostaneme **Lagrangeovy rovnice II. druhu**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{3N} F_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \tag{39}$$

(x_i jsou kartézské souřadnice). „Zobecněná síla“ na pravé straně nemusí mít rozměr N.

Pokud se jedná o konzervativní sílu, můžeme pro popis systému zavést **lagrangián**

$$L = E_k - U. \tag{40}$$

Lagrangeovy rovnice se pak dají napsat ve tvaru:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \tag{41}$$

1.9 Hamiltonovy kanonické rovnice

Další možný způsob popisu systému je pomocí Hamiltonova formalizmu. Konfigurační prostor se nahrazuje **fázovým prostorem**, který je tvořen zobecněnými souřadnicemi a **kanonicky sdruženými hybnostmi**. Bod ve fázovém prostoru plně určuje stav systému. Přechod od proměnných $q, \dot{q}, t$ k proměnným q, p, t se nazývá **Legendrova duální transfomace**.

Hamiltonián má nejčastěji tvar $H = E_k + U$. Volná částice: $H = \frac{p^2}{2m}$, harmonický oscilátor $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$, částice v elektromagnetickém poli $H = \frac{1}{2m}(\vec{p} - e\vec{\mathcal{A}})^2 + e\varphi$. Hamiltonián se používá například v kvantové mechanice a statistické fyzice (partiční funkce).

Kanonické hybnosti zavedeme vztahem

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{42}$$

a systém popíšeme **hamiltoniánem** - funkcí ve fázovém prostoru

$$H(q_i, p_i, t) \equiv \sum_{j=1}^{n} p_j \dot{q}_j - L. \tag{43}$$

Pohybové rovnice pak budou vyjadřovat **Hamiltonovy kanonické rovnice**

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_j} &= \dot{q}_j \\ \frac{\partial H}{\partial q_j} &= -\dot{p}_j. \end{aligned} \tag{44}$$

Tyto rovnice je možné napsat pomocí tzv. **Poissonových závorek** (obdoba komutátorů v kvantové mechanice)

$$\{f,g\} \equiv \sum_{j=1}^{N} \Big(\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial g}{\partial q_j} \Big) \tag{45}$$

ve tvaru

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\}, \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\}. \tag{46}$$

2 Kinematika a dynamika tuhého tělesa

Popis pomocí Eulerových úhlů, Eulerovy dynamické rovnice, Lagrangeova funkce pro tuhé těleso, pohyb setrvačníků.

2.1 Eulerovy úhly

Studujeme-li pohyb těles, jako zjednodušení zavádíme pojem **tuhého tělesa** - je to nederfomovatelná soustava hmotných bodů, které mají vůči sobě pevné vzdálenosti. Takovéto těleso má šest stupňů volnosti - 3 rotační a 3 translační.

Při popisu rotačního pohybu tělesa můžeme zvolit dvě báze: **bázi pevnou v prostoru** $\{\vec{e_i}\}$ a **korotující bázi** pevně spojenou s tělesem $\{\vec{e_i'}\}$. Vzájemná poloha těchto dvou bází je popsána (za předpokladu, že počátky obou soustav splývají) ortogonální maticí otočení závislou na čase

$$\vec{e_i'} = A_{ik}\vec{e_k}. \tag{47}$$

Pokud provedeme další otočení, stačí tyto matice vynásobit.

Za obecné souřadnice popisující otáčivý pohyb tuhého tělesa se obyčejně volí tzv. **Eulerovy úhly**. Vezměme si dvě báze - bázi pevnou v prostoru $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3}$ a korotující bázi $\vec{x_1'}, \vec{x_2'}, \vec{x_3'}$, jejichž vzájemná poloha je určena těmito třemi úhly:

- **precesní úhel** $\psi \in \langle 0, 2\pi \rangle$ – nula odpovídá ose $\vec{x_1}$, úhel leží v rovině $\{\vec{x_1}, \vec{x_2}\}$, kladná orientace je ve směru osy $\vec{x_2}$, měříme úhel, který svírá osa $\vec{x_1}$ s přímkou $\vec{n}$, která vznikne protnutím roviny $\{\vec{x_1}, \vec{x_2}\}$ a roviny $\{\vec{x_1'}, \vec{x_2'}\}$
- **nutační úhel** $\vartheta \in \langle 0, \pi \rangle$ – nula odpovídá ose $\vec{x_3}$, kladná orientace směrem k rovině $\{\vec{x_1}, \vec{x_2}\}$, měříme úhel mezi osou $\vec{x_3}$ a $\vec{x_3'}$
- **rotační úhel** $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$ – nula je v rovině $\{\vec{x_1}, \vec{x_2}\}$, kladná orientace směrem k ose $\vec{x_3}$, měříme úhel mezi přímkou $\vec{n}$ a osou $\vec{x_1'}$

Jedná se o tři otočení a vzájemná poloha pevné a korotující báze je pak určena součinem matic těchto otočení:

$$A = A_3 \cdot A_2 \cdot A_1 =$$
$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ 0 & -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{48}$$

Jednodušší přístup je pomocí zavedení vektoru **úhlové rychlosti**

$$\vec{\omega} = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} A^T. \tag{49}$$

Potom lze dokázat, že pro libovolný vektor platí

$$\frac{\mathrm{d}\vec{w}}{\mathrm{d}t}\Big/_{\text{pevna}} = \frac{\mathrm{d}\vec{w}}{\mathrm{d}t}\Big/_{\text{korotujici}} + \vec{\omega} \times \vec{w}. \tag{50}$$

Pomocí Eulerových úhlů můžeme vyjádřit vektor úhlové rychlosti

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_\varphi + A_3\vec{\omega}_\vartheta + A_3A_2\vec{\omega}_\psi = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \sin\vartheta\cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \cos\vartheta & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}. \tag{51}$$

Tento vztah se nazývá **Eulerovy kinematické rovnice**.

2.2 Eulerovy dynamické rovnice

Vzhledem k tomu, že korotující báze je neinerciální, musíme druhou větu impulzovou vzhledem k této bázi určit podle rovnice, která určuje vztah mezi pevnou a korotující bází:

$$\vec{M}/_{\text{pevna}} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}\Big/_{\text{pevna}} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}\Big/_{\text{korotujici}} + \vec{\omega} \times \vec{L}. \tag{52}$$

Schopnost tělesa setrvávat v otáčivém pohybu popisujeme **tenzorem momentu setrvačnosti J**. Pokud ho vyjádříme v bázi hlavních os, bude diagonální; tyto diagonální elementy označíme $\mathbf{J_1}, \mathbf{J_2}, \mathbf{J_3}$. Použitím $L_i = \mathbf{J_i}\omega_i$ dostaneme **Eulerovy dynamické rovnice**:

$$\begin{aligned} M_1 &= \mathbf{J_1}\dot{\omega}_1 - (\mathbf{J_2} - \mathbf{J_3})\omega_2\omega_3 \\ M_2 &= \mathbf{J_2}\dot{\omega}_2 - (\mathbf{J_3} - \mathbf{J_1})\omega_3\omega_1 \\ M_3 &= \mathbf{J_3}\dot{\omega}_3 - (\mathbf{J_1} - \mathbf{J_2})\omega_1\omega_2 \end{aligned} \tag{53}$$

(„kompaktnější“ tvar je

$$M_i = \mathbf{J_i}\dot{\omega}_i - \varepsilon_{ijk}\mathbf{J_j}\omega_j\omega_k, \tag{54}$$

kde ε_{ijk} je Levi-Civitův symbol).

2.3 Lagrangeova funkce pro tuhé těleso

Někdy bývá výhodnější použít pro popis otáčení tuhého těleso Lagrangeův formalizmus. V takovém případě potřebujeme vyjádřit celkovou kinetickou energii tělesa.

Rotační část kinetické energie můžeme vyjádřit jako

$$E_{k\,\text{rot}} = \frac{1}{2}\mathbf{J_{ij}}\,\omega_i\omega_j. \tag{55}$$

Pokud znovu zvolíme za korotující bázi bázi hlavních os tenzoru momentu setrvačnosti, vzorec se zjednoduší a celkovou kinetickou energii můžeme napsat jako (v je rychlost hmotného středu):

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}(\mathbf{J_1}\omega_1^2 + \mathbf{J_2}\omega_2^2 + \mathbf{J_3}\omega_3^2). \tag{56}$$

Lagrangeovu funkci pak samozřejmě můžeme vyjádřit

$$L = T - U. \tag{57}$$

2.4 Setrvačníky

Tuhé těleso, které má pevný bod, nazýváme **setrvačníkem**. Pokud má těleso navíc osu souměrnosti rozložení hmotnosti (se kterou ztotožňujeme osu $\vec{e_3'}$), platí navíc $\mathbf{J_1} = \mathbf{J_2}$ a setrvačník je **symetrický**.

Pokud vyšetřujeme pohyb **bezmomentového symetrického setrvačníku**, můžeme řešit Eulerovy dynamické rovnice s momenty sil rovnými nule a s podmínkou $\mathbf{J_1} = \mathbf{J_2}$. Dostaneme řešení

$$\begin{aligned} \psi &= \tfrac{K}{\sin\vartheta_0} t + \psi_0 \\ \vartheta &= \vartheta_0 \\ \varphi &= \omega_0 t + \delta \end{aligned} \tag{58}$$

Osa souměrnosti setrvačníku se otáčí úhlovou rychlostí $\dot{\psi} = \frac{K}{\sin\vartheta_0}$ kolem konstantního směru momentu hybnosti $\vec{L}$. Tento kužel pevný v prostoru, jehož osu tvoří vektor momentu hybnosti $\vec{L}$ a povrch osa symetrie setrvačníku, nazýváme **nutačním kuželem**. Při pohybu osy souměrnosti setrvačníku po nutačním kuželi hovoříme o **precesi**. Při změně Eulerova úhlu ϑ hovoříme o **nutaci**.

Na druhou stranu, cheme-li popsat pohyb **těžkého symetrického setrvačníku** (tj. tuhého tělesa otáčejícího se v tíhovém poli Země), je lepší použít Lagrangeovy rovnice druhého druhu. Lagrangián bude mít tvar ($\vec{G}$ je tíha tělesa, $\vec{r_S}$ poloha hmotného středu)

$$L = \frac{1}{2}(\mathbf{J_1}(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \mathbf{J_3}\omega_3^2) + \vec{G} \cdot \vec{r_S}. \tag{59}$$

Řešení nelze obecně vyjádřit pomocí elementárních funkcí, jen ve tvaru eliptických integrálů. Lze však provést kvalitativní diskuzi. Řešení můžeme dobře znázornit, když kolem bodu upevnění setrvačníků opíšeme kulovou plochu a na ní vyznačíme její průsečík s osou souměrnosti. Průsečík se vždy pohybuje po pásu na kulové ploše. Můžeme rozlišit tři případy v závislosti na $\dot{\psi}$:

- $\dot{\psi} > 0$ – průsečík tvoří vlnky
- $\dot{\psi} < 0$ – průsečík tvoří smyčky
- $\dot{\psi} = 0$ – průsečík tvoří „spojená U“, v podstatě obrazec mezi smyčkou a vlnkou.

3 Variační formulace fyzikálních zákonů

Hamiltonův variační princip, vztah mezi mechanikou a geometrickou optikou. Hamiltonův princip pro soustavy s nekonečně mnoha stupni volnosti(struna, elektromagnetické pole).

3.1 Hamiltonův variační princip

Zavedeme **akční fukcionál**

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n)\,\mathrm{d}t. \tag{60}$$

Zobecněná potenciální energie a **zobecněná kinetická energie** v lagrangiánu jsou v obecně závislé na zobecněných souřadnicích, rychlostech a času.

Lagrangeovy rovnice II. druhu jsou potom Eulerovy rovnice pro extremálu akčního funkcionálu S

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)\,\mathrm{d}t = 0. \tag{61}$$

Toto je matematická formulace **Hamiltonova variačního principu**. Slovně bychom ho mohli formulovat takto: *Pohyb mechanické soustavy v časovém intervalu $\langle t_1, t_2\rangle$ probíhá tak, že pro skutečnou dráhu nabývá akce extremální hodnoty.*

Požadujeme, aby soustava procházela určitým bodem skutečné dráhy a jemu přiřazeným bodem vyděrované dráhy současně. Variace ostatních proměnných $q_i, \dot{q}_i$ pak nazýváme **izotropní**, což můžeme zapsat ve tvaru

$$\delta t = 0. \tag{62}$$

Dále požadujeme, aby počáteční a koncový bod skutečné dráhy byly počátečním a koncovým bodem všech přípustných vyděrovaných drah, neboli

$$\delta q_i(t_1) = 0, \delta q_i(t_2) = 0 \qquad \text{pro} \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{63}$$

V akčním funkcionálu jsou obsaženy veškeré požadované informace o uvažovaném problému, tj. pohybové rovnice, počáteční a okrajové podmínky, apod.

Akční fukncionál můžeme také získat z Hamiltonovy-Jacobiho rovnice

$$H(q_j, \frac{\partial S}{\partial q_j}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \tag{64}$$

Derivací akčního funkcionálu podle netriviálních integračních konstant potom dostaneme trajektorie.

3.2 Mechanika a geometrická optika

Pohybové rovnice v klasické mechanice lze napsat ve tvaru podmínky pro extremální hodnotu akčního fukncionálu S. Analogicky ovšem můžeme geometrickou optiku založit na Fermatově principu, který požaduje, aby se světlo šířilo tak, že se z místa A do místa B dostane za nejkratší možnou dobu.

V mechanice nabývá extremální hodnoty akce S

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)\, \mathrm{d}t = 0, \tag{65}$$

v optice je to optická dráha

$$\delta \int_A^B n(\vec{r})\, \mathrm{d}l = 0. \tag{66}$$

3.3 Struna a elektromagnetické pole

Uvažujme strunu o délce l, délkové hustotě ϱ, napjatou napětím σ. Výchylku z rovnovážné polohy označme $y(x, t)$. Sílu, která vrací strunu zpátky, můžeme v aproximaci malých kmitů vyjádřit jako

$$\sigma \Big[\frac{\partial y}{\partial x}\Big(x + \mathrm{d}x\Big) - \frac{\partial y}{\partial x}\Big(x\Big) \Big] \approx \sigma \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\, \mathrm{d}x. \tag{67}$$

Kinetickou energii můžeme vyjádřit jako

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{\varrho}{2} \int_0^l \Big(\frac{\partial y}{\partial t}\Big)^2 \mathrm{d}x. \tag{68}$$

Potenciální energie má tvar

$$\mathrm{d}U = \int_0^y F_y\, \mathrm{d}y = \sigma \int_0^y \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x. \tag{69}$$

Při zavedení substituce

$$z = \frac{\partial y}{\partial x} \qquad (\text{potom platí} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}) \tag{70}$$

můžeme psát

$$U = \sigma \int_0^l \Big(\int_0^y \frac{\partial z}{\partial y} z\, \mathrm{d}y \Big)\, \mathrm{d}x = \frac{\sigma}{2} \int_0^l z^2\, \mathrm{d}x = \frac{\sigma}{2} \int_0^l \Big(\frac{\partial y}{\partial x}\Big)^2 \mathrm{d}x. \tag{71}$$

Lagrangián má potom tvar ($\mathcal{L}$ je hustota lagrangiánu):

$$L = E_k - U = \int_0^l \frac{\varrho}{2}\Big(\frac{\partial y}{\partial t}\Big)^2 - \frac{\sigma}{2}\Big(\frac{\partial y}{\partial x}\Big)^2 \,\mathrm{d}x = \int_0^l \mathcal{L}\,\mathrm{d}x. \tag{72}$$

Podle Hamiltonova principu hledáme variaci:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L\,\mathrm{d}t = \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \mathcal{L}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = 0 \tag{73}$$

neboli řešíme rovnici ($y_{,x}$ je označení pro $\frac{\partial y}{\partial x}$)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_{,t}} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_{,x}} = 0. \tag{74}$$

Dosazením tvaru lagrangiánu dostaneme rovnici:

$$\varrho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \sigma\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{1}{k^2}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0. \tag{75}$$

Pohyb struny se řídí vlnovou rovnicí. Stejnou rovnicí se řídí elektromagnetické pole, pouze parametr k má u struny tvar $k^2 = \frac{\varrho}{\sigma}$, u elektromagnetického pole je to fázová rychlost.

Řešení této rovnice má tvar

$$y = f(x + kt) + g(x - kt) \tag{76}$$

(f a g jsou libovolné funkce).